1. Проверка гипотез согласия

1.1. Гамма-функция

Гамма-функцией называется несобственный интеграл

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx, \quad \lambda > 0\,.$$

Свойства гамма-функции.

1. $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$;
2. $\Gamma(n+1) = n!, \ \ n \in \mathbf{N}$;
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Первое утверждение следует из интегрирования по частям.

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^\infty \underbrace{x^\lambda}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = uv\,|_0^\infty - \int\limits_0^\infty u'v dx =$$

$$= x^\lambda \left(-e^{-x}\right)|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\left(-e^{-x}\right) dx = \lambda\Gamma(\lambda)\,,$$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty x^0 e^{-x} dx = -e^{-x}\,|_0^\infty = 1\,.$$

Если $\lambda \in \mathbf{N}$, то повторное применение $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ приведет к $\Gamma(n+1) = n!$. Последнее получаем из интеграла Пуассона.

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}\,.$$

Используя замену $\sqrt{x} = t, \quad x = t^2, \quad dx = 2tdt$, получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t} e^{-t^2} 2tdt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}\,.$$

1.2. Гамма-распределение

Нетрудно показать, что

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx = \int_0^\infty \frac{(\alpha x)^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda-1}}e^{-\alpha x}d(\alpha x)\frac{1}{\alpha} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\alpha^\lambda},$$

отсюда получаем, что функция вида

$$\gamma(x,\alpha,\lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

обладает свойством плотности распределения случайной величины ξ с характеристической функцией (х.ф.)

$$\psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}\gamma(x,\alpha,\lambda) =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-(\alpha-it)x}dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(\lambda)}{(\alpha-it)^\lambda} = \left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}.$$

Параметры α и λ называются соответственно параметрами *масштаба* и *формы.* Из того, что х.ф. суммы независимых случайных величин равна произведению х.ф., получаем, что если случайные величины $\xi_1 \sim \gamma(x,\alpha,\lambda_1)$ и $\xi_2 \sim \gamma(x,\alpha,\lambda_2)$ независимы, то $\xi_1+\xi_2 \sim \gamma(x,\alpha,\lambda_1+\lambda_2)$. Для вычисления моментов воспользуемся свойством характеристической функции $\psi^{(\nu)}(0) = i^\nu\alpha_\nu$.

$$\psi'(t) = -\lambda\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda-1}\left(-\frac{i}{\alpha}\right),$$

$$\psi''(t) = (-\lambda)(-\lambda-1)\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda-2}\left(-\frac{i}{\alpha}\right)^2,$$

$$\alpha_1 = \frac{\psi'(0)}{i} = \frac{\lambda}{\alpha},$$

$$\alpha_2 = \frac{\psi''(0)}{i^2} = \frac{1}{i^2}\lambda(\lambda+1)\left(-\frac{i}{\alpha}\right)^2 = \frac{\lambda^2+\lambda}{\alpha^2},$$

$$\mu_2 = \alpha_2-\alpha_1^2 = \frac{\lambda}{\alpha^2}.$$

1.3. Распределение χ^2 как частный случай γ

Существенным частным случаем гамма-распределения является распределение *хи-квадрат*. Говорят, что случайная величина η имеет распределение $\chi^2(n)$ с n степенями свободы, если она распределена также, как сумма квадратов n независимых стандартно нормально распределенных случайных величин.

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Вычислим функцию $F_\eta(x)$ и плотность $f_\eta(x)$ распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

$$F_\eta(x) = P\{\eta \le x\} = P\{\xi^2 \le x\} = P\{-\sqrt{x} < \xi \le \sqrt{x}\} = \\ = \begin{cases} F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}), & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \begin{cases} \frac{F'_\xi(\sqrt{x}) + F'_\xi(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, & x > 0. \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Так как для $\mathcal{N}(0,1)$ закона распределения имеет место $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2}{2}}$, для $x > 0$ плотность квадрата стандартно нормально распределенной величины есть $\gamma\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — плотность гамма распределения

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

с х.ф. $\psi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно, если речь идет о сумме n независимых величин ξ^2, то получаем характеристическую функцию $\psi_n(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$ гамма распределенной величины с параметром масштаба $\alpha = \frac{1}{2}$ и формы $\lambda = \frac{n}{2}$. Моменты получают достаточно простое выражение:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n, \quad \mu_2 = \frac{\lambda}{\alpha^2} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2^2}} = 2n\,.$$

1.4. Теорема о согласии распределений. Случай известных параметров

Нулевая гипотеза H_0 заключается в том, что выборка наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ относится к случайной величине ξ с генеральной функцией распределения $F(x)$. Множество S значений случайной величины разбито на r непересекающихся интервалов $S_1, \ldots, S_r$.

$$\cup_{i=1}^{r} S_i = S, \quad S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j,$$
$$p_i = P\{\xi \in S_i\} > 0, \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1.$$

Соответствующие эмпирические частоты равны ν_i, $\sum\limits_{i=1}^{r} \nu_i = n$. В качестве меры расхождения между эмпирическим и генеральным распределением рассматривается величина

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i \right)^2,$$

где, согласно Пирсону, коэффициенты имеют вид $c_i = \frac{n}{p_i}$.

Теорема 1. *При справедливости H_0 статистика*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} \tag{1}$$

имеет распределение $\chi^2(r-1)$ хи-квадрат с числом степеней свободы, равным $r-1$.

Мультиномиальное распределение является обобщением биномиального, в котором вместо двух исходов (успех или неудача) рассматривается r вариантов [1]. Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_r$ - случайные величины, означающие количества разных видов исходов, $\nu_1 + \ldots + \nu_r = n$. Вероятность i-го исхода равна p_i, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

$$P\{\nu_1 = n_1, \ldots, \nu_r = n_r\} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_r!} p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}.$$

---

[1] Например, имеются три исхода: „да“, „нет“, „не знаю“, которые осуществляются с вероятностями p_1, p_2, p_3, и n независимых испытаний. Количество вариантов получить n_1 ответов „да“, n_2 ответов „нет“ и n_3 ответов „не знаю“, где $n_1 + n_2 + n_3 = n$, равно $C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$.

Характеристическая функция мультиномиального распределения имеет вид:

$$\Phi_\nu(t_1,\ldots,t_r) = \mathbf{E}e^{it^T\nu} = \mathbf{E}e^{i(t_1\nu_1+\ldots+t_r\nu_r)} = \\ = (p_1e^{it_1}+\ldots+p_re^{it_r})^n\,.$$

В частности, $\phi(t_1) = \Phi_\nu(t_1,0,\ldots,0) =$

$$= (p_1e^{it_1}+p_2e^{i\cdot 0}+\ldots+p_re^{i\cdot 0})^n = (p_1e^{it_1}+p_2+\ldots+p_r)^n = \\ = (p_1e^{it_1}+(1-p_1))^n$$

— характеристическая функция биномиального распределения.

Обозначим через $x_i = \frac{\nu_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ и покажем, что $\sum\limits_{i=1}^r x_i\sqrt{np_i} = 0$. Действительно, $\nu_i = np_i + x_i\sqrt{np_i}$,

$$n = \sum_{i=1}^r \nu_i = \sum_{i=1}^r (np_i + x_i\sqrt{np_i}) = n + \sum_{i=1}^r x_i\sqrt{np_i}\,.$$

Рассмотрим характеристическую функцию совместного распределения величин $x_1,\ldots,x_r$

$$\Phi_x(t_1,\ldots,t_r) = \mathbf{E}e^{i(t_1x_1+\ldots+t_rx_r)} = \\ = \mathbf{E}e^{i(t_1\frac{\nu_1}{\sqrt{np_1}}+\ldots+t_r\frac{\nu_1 r}{\sqrt{np_r}}) - i(t_1\sqrt{np_1}+\ldots+t_r\sqrt{np_r})} = \\ = e^{-i\sqrt{n}\sum_k t_k\sqrt{p_k}}\Phi_\nu\left(\frac{t_1}{\sqrt{np_1}},\ldots\frac{t_r}{\sqrt{np_r}}\right) = \\ = e^{-i\sqrt{n}\sum_k t_k\sqrt{p_k}}\left(p_1e^{\frac{it_1}{\sqrt{np_1}}}+\ldots+p_re^{\frac{it_r}{\sqrt{np_r}}}\right)^n\,.$$

Прологарифмируем это выражение,

$$\ln\Phi_x(t) = -i\sqrt{n}\sum_k t_k\sqrt{p_k} + n\ln(p_1e^{\frac{it_1}{\sqrt{np_1}}}+\ldots+p_re^{\frac{it_r}{\sqrt{np_r}}}),$$

и для второго слагаемого воспользуемся разложениями Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3),\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\,.$$

$$n\ln(p_1e^{\frac{it_1}{\sqrt{np_1}}}+\ldots+p_re^{\frac{it_r}{\sqrt{np_r}}}) = \\ = n\ln\left(\underbrace{\sum_k p_k}_{1} + \underbrace{\sum_k p_k\frac{it_k}{\sqrt{np_k}} + \frac{1}{2}\sum_k p_k\left(\frac{it_k}{\sqrt{np_k}}\right)^2 + O(n^{-\frac{3}{2}})}_{X}\right) = \\ = n\left(X - \frac{1}{2}X^2 + O(X^3)\right) = \\ = n\left(\frac{i}{\sqrt{n}}\sum_k\sqrt{p_k}t_k + \frac{1}{2n}\sum_k(it_k)^2 + O(n^{-\frac{3}{2}})\right) - \\ -\frac{n}{2}\left(\frac{i^2}{n}\left(\sum_k\sqrt{p_k}t_k\right)^2 + O(n^{-\frac{3}{2}})\right) + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

При переходе к $\ln\Phi_x(t)$ первое слагаемое исчезает.

$$\ln\Phi_x(t) = -\frac{1}{2}\sum_k t_k^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_k \sqrt{p_k}t_k\right)^2 + O(n^{-\frac{1}{2}}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_k t_k^2 - \left(\sum_k \sqrt{p_k}t_k\right)^2\right) + O(n^{-\frac{1}{2}})\,.$$

При помощи ортогональной матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1} & \dots & \sqrt{p_r} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

рассмотрим вектор $u = (u_1, \dots, u_r)^T = At$, где $t = (t_1, \dots, t_r)^T$, с первой компонентой $u_1 = \sum_k \sqrt{p_k}t_k$.

$$\sum_k t_k^2 = t^T t = t^T A^T A t = u^T u = \sum_k u_k^2,$$

$$Q(t_1, \dots, t_r) = \sum_k t_k^2 - \left(\sum_k \sqrt{p_k}t_k\right)^2 = \sum_k u_k^2 - u_1^2 = \sum_{k=2}^{r} u_k^2\,.$$

Следовательно, $Q(t_1, \dots, t_r)$ неотрицательна и имеет ранг $r-1$, и матрица вторых моментов имеет $r-1$ характеристических чисел, равных 1 и одно характеристическое число, равное 0.

Таким образом, при достаточно больших n совместная характеристическая функция $x_1, \dots, x_r$ имеет вид характеристической функции многомерного нормального закона с нулевым вектором средних и с матрицей вторых моментов ранга $r-1$, $\sum_k x_k\sqrt{p_k} = 0$. Ортогональное преобразование переводит вектор $(x_1, \dots, x_r)$ в вектор с некоррелированными компонентами, у которого диагональная матрица вторых моментов имеет один ноль на главной диагонали. То есть одна из новых некоррелированных компонент имеет нулевую дисперсию, или, проще говоря, равна нулю. Сумма квадратов при ортогональном преобразовании равна сумме квадратов новых некоррелированных компонент, следовательно, $\sum_{k=1}^r x_k^2 \sim\ \chi^2(r-1)$.

1.5. Теорема о согласии распределений. Случай неизвестных параметров

В случае, когда параметры распределения оцениваются по выборке, для важного класса оценок Фишером было предложено изменение, согласно которому *число степеней свободы нужно уменьшить на количество* *оцениваемых параметров.* Рассмотрим статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s))^2}{np_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}, \tag{2}$$

в которой p_i являются функциями от выборочных наблюдений, и свойства выборочного распределения зависят от метода оценивания параметров. Нейманом и Пирсоном было изучено предельное распределение величины χ^2 при оценке параметров по *методу минимума хи-квадрат.* Относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ решается система уравнений

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\nu_i - np_i}{p_i} + \frac{(\nu_i - np_i)^2}{2np_i^2} \right) \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0\,,$$

где $j = 1, 2, \dots, s$. Полученные таким образом оценки α_j подставляются в (2). Если при больших n вторым слагаемым можно пренебречь, считая $2np_i^2$ постоянным, то получим систему

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i - np_i}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0\,. \tag{3}$$

Метод оценки параметров из этой системы называется *видоизмененным методом минимума хи-квадрат.*

Теорема 2. *Пусть заданы функции $p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ от $s < r$ переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, $i = 1, 2, \dots, r$, удовлетворяющие условиям:*

1. $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = 1$;
2. $p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s) > c^2$;
3. *все p_i имеют непрерывные производные $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j}$, $\frac{\partial^2 p_i}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}$;*
4. *матрица первых производных имеет ранг s.*

Тогда уравнения (3) имеют одно решение $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, сходящееся по вероятности к α_0 при $n \to \infty$. Значение статистики (2) при таких α асимптотически распределено по $\chi^2(r - s - 1)$.

1.6. Практическое занятие по теме проверки согласия выборочного и гипотетического распределений

Статистический критерий согласия Пирсона

На рис. 1 представлена гистограмма относительных частот выборки, смоделированной по нормальному закону с параметрами $\mu = 50$, $\sigma = 20$. Выясним, насколько согласовано эмпирическое распределение с нормальным $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. В качестве оценок рассмотрим $\hat{\mu} = \bar{x} = 48.72$, $\hat{\sigma} = S = 20.47$.

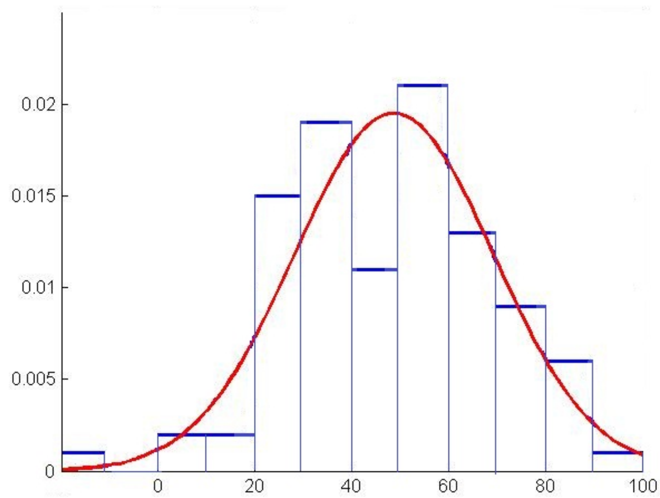

Рис. 1. Выборочная гистограмма и плотность $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Обозначим через $(z_{i-1}; z_i]$ интервал S_i, $i = 1, \ldots, r$, $z_0 = -\infty$, $z_r = +\infty$, через ν_i количество элементов выборки x_k, таких что $z_{i-1} < x_k \le z_i$. Для вычисления вероятностей p_i воспользуемся функцией $\Phi(x)$ стадартного нормального распределения[2].

$$p_i = \Phi\left(\frac{z_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{z_{i-1} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right). \tag{4}$$

[2] В электронных таблицах $\Phi(x)$ можно получить при помощи функции НОРМСТРАСП(x), в R функция $pnorm(x)$.

Объединим наблюдения в крайних ячейках так, чтобы все np_i были не меньше пяти. Результаты вычислений представлены в следующей таблице.

i	$(z_{i-1}; z_i]$	ν_i	$\Phi(\frac{z_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}})$	p_i	$\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}$
1	$(-\infty; 20]$	5	0.080	0.080	1.144
2	$(20; 30]$	15	0.180	0.100	2.510
3	$(30; 40]$	19	0.335	0.155	0.799
4	$(40; 50]$	11	0.525	0.190	3.360
5	$(50; 60]$	21	0.709	0.184	0.359
6	$(60; 70]$	13	0.851	0.142	0.094
7	$(70; 80]$	9	0.937	0.086	0.018
8	$(80; +\infty)$	7	1	0.063	0.072

Суммируя элементы в последнем столбце, получаем значение статистики $\chi^2_* = 8.356$. Число степеней свободы равно $df = 8 - 1 - 2 = 5$.

Критическое значение, соответствующее уровню значимости $\alpha = 0.05$, вычисляется при помощи специальных таблиц, вероятностных калькуляторов или электронных таблиц *Excel* и равно $\chi^2_{0.95} = \text{ХИ2ОБР}(0.05; 5) = 11.07$.[3] Наблюдаемое значение статистики $\chi^2_* = 8.356$ меньше критического, следовательно, гипотеза о согласии эмпирического распределения с нормальным не отвергается с уровнем значимости $\alpha = 0.05$. Доверительный уровень вероятности[4] можно вычислить

$$p = P\{\chi^2 > \chi^2_*\} = \text{ХИ2РАСП}(8.356; 5) = 0.14 > \alpha = 0.05.$$

При $p < \alpha$ мы бы сказали, что эмпирическое распределение плохо согласуется с нормальным. Вместо этого критерия для проверки нормальности можно использовать критерий Шапиро-Уилка, $shapiro.test()$ в R.

[3] В R аналогичная функция $qchi(0.95, 5)$.

[4] В R используется $pchisq(x, df)$

Вероятность выигрыша в игре в кости

Игральными костями служили кости животных – астрагалы, которые при бросании могли падать на четыре стороны. Эти стороны как-то нумеровались, но единой системы не было. В одной из игр в древней Греции бросали одновременно четыре астрагала. Выигрышным броском считался тот, при котором выпадали разные стороны; такой бросок назывался „Венерой“. В археологических раскопках, начиная с V тысячелетия до н.э. (возможно, ранее) среди найденных костей астрагалы встречаются в несколько десятков раз чаще, чем другие кости.

После многократных исследований различных астрагалов были получены следующие частоты выпадения различных сторон. Частота выпадения широкой стороны A с углублением примерно равна 0.39, следующей по величине B равна 0.37; частоты выпадения двух оставшихся сторон C и D равны 0.12.

При подбрасывании четырех костей одновременно общее число исходов равно $4^4 = 256$. Например,

$$P(AAAA) = 0.39^4 = 0.0231,$$
$$P(ABCD) = 0.39 \cdot 0.37 \cdot 0.12 \cdot 0.12 = 0.002.$$

Всего броску "Венера" соответствуют $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ варианта перестановок названных сторон на четырех астрагалах:

$$\begin{array}{cccccc}
ABCD & ABDC & ACBD & ACDB & ADBC & ADCB \\
BACD & BADC & BCAD & BCDA & BDAC & BDCA \\
CABD & CADB & CBAD & CBDA & CDAB & CDBA \\
DABC & DACB & DBAC & DBCA & DCAB & DCBA
\end{array}$$

Суммированием соответствующих вероятностей получаем вероятность броска "Венера" , равную $24 \cdot 0.002 = 0.048 \approx 0.05$.

Принцип маловероятных событий

Для проверки статистической гипотезы H_0 относительно параметров θ или других свойств генеральной совокупности с функцией распределения $F(x|\theta)$ случайной величины ξ используются выборочные наблюдения $x_1, \ldots, x_n$. Конкурирующую или альтернативную гипотезу будем обозначать через H_1. Гипотеза называется простой, если она однозначно определяет функцию распределения, например, $H_0 : \theta = \theta_0$, иначе сложной, например, $H_0 : \theta > \theta_0$.

Правило, согласно которому отвергается гипотеза, называется *статистическим критерием,* а используемая для проверки гипотезы функция от выборочных наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ называется *статистикой критерия.*

Проверка гипотез основана на *принципе маловероятных событий*, согласно которому события, вероятность которого мала, считаются невозможными. Сложилось так, что в качестве „малой“ вероятности принимают вероятность $\alpha = 0.05$ выигрыша в игре в кости. Гипотезу отвергают тогда, когда наблюдаемое значение статистики попадает в *критическую область* V, которую выбирает так, чтобы вероятность $P(V|H_0)$ была мала,

$$P(V|H_0) \leq \alpha\,.$$

ПРИМЕР. На $n = 25$ автомобилях с усовершенствованным двигателем средний расход бензина составил $\bar{x} = 9.3$ л на 100 км. Считая выборку нормальной $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ с дисперсией $\sigma^2 = 4$, выясним, нельзя ли наблюдаемое улучшение технической характеристики считать случайным. Проверим гипотезу $H_0 : \mu = 10$ о том, что расход топлива не изменился, В качестве альтернативной рассмотрим гипотезу $H_1 : \mu < 10$.

Используя свойства выборочного среднего $\bar{x}$, рассмотрим статистику критерия $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ с критической областью $V = (-\infty; -1.645]$, о которой известно, что $P(V) = 0.05$. Подставляя значения параметров и $\bar{x} = 9.3$, получаем значение статистики $Z = -1.75 \in V$, следовательно, гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной H_1, уменьшение топлива значимо и не может быть объяснено случайностью.

2. Практическое занятие на предмет исследования свойств оценок

2.1. Задача на максимум и минимум случайных величин

Показать, что оценка среднего для выборки из равномерно распределенных величин $x_1, \ldots, x_n$ *в виде* $\hat{\mu} = \frac{x^{(n)} + x^{(1)}}{2}$ *эффективнее* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $x_1, \ldots, x_n$ имеют функцию распределения $F(x)$. Обозначим через $U = \min(x_1, \ldots, x_n)$, $V = \max(x_1, \ldots, x_n)$.

$$F_v(v) = P\{V < v\} = P\{\max(x_1, \ldots, x_n) < v\} =$$

$$= P\{x_1 < v\} \ldots P\{x_n < v\} = (F(v))^n,$$

$$1 - F_u(u) = P\{U > u\} = P\{\min(x_1, \ldots, x_n) > u\} =$$

$$= P\{x_1 > u\} \ldots P\{x_n > u\} = (1 - F(u))^n,$$

$$F_u(u) = 1 - (1 - F(u))^n,$$

из $P\{V < v\} = P\{V < v, U < u\} + P\{V < v, U \geq u\}$ получаем совместное распределение

$$F_{uv}(u, v) = P\{V < v, U < u\} = P\{V < v\} - P\{V < v, U \geq u\} =$$

$$= (F(v))^n - P\{u < x^{(1)} < \ldots < x^{(n)} < v\} =$$

$$= (F(v))^n - (F(v) - F(u))^n$$

Дифференцируем по u, v, получаем совместную плотность

$$\frac{\partial F_{uv}(u, v)}{\partial v} = n(F(v))^{n-1} f(v) - n(F(v) - F(u))^{n-1} f(v),$$

$$f_{uv}(u, v) = \frac{\partial^2 F_{uv}(u, v)}{\partial v \partial u} = n(n-1) f(u) f(v) (F(v) - F(u))^{n-2}$$

В случае равномерного распределения с функцией распределения $F(x) =$

$\frac{x-a}{b-a}$ и плотностью $f(x)=\frac{1}{b-a}$ получаем выражение

$$f_{uv}(u,v)=\frac{\partial^2 F_{uv}(u,v)}{\partial v\partial u}=\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(v-u)^{n-2}$$

Рассмотрим три вспомогательных интеграла

$$\int\limits_a^b (b-u)^k du=\frac{(b-a)^{k+1}}{k+1} \tag{5}$$

$$\int\limits_a^b (b+u)(b-u)^k du=\frac{(b+a)(b-a)^{k+1}}{k+1}+\frac{(b-a)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \tag{6}$$

$$\int\limits_a^b (b+u)^2(b-u)^k du=\frac{(b+a)^2(b-a)^{k+1}}{k+1}+ \tag{7}$$

$$+\frac{2}{k+1}\left[\frac{(b+a)(b-a)^{k+2}}{k+2}+\frac{(b-a)^{k+3}}{(k+2)(k+3)}\right] \tag{8}$$

Используем их для вычисления математического ожидания случайной величины $Z=\frac{U+V}{2}$ и обозначим через $c=\frac{n(n-1)}{2(b-a)^n}$.

$$\mathbb{E}Z=\int\limits_a^b du\int\limits_u^b \frac{u+v}{2}f_{uv}(u,v)dv=\int\limits_a^b du\int\limits_u^b \frac{u+v}{2}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(v-u)^{n-2}dv=$$

$$=c\int\limits_a^b du\int\limits_u^b (u+v)(v-u)^{n-2}dv,$$

$$\int\limits_u^b (u+v)(v-u)^{n-2}dv=(u+v)\frac{(v-u)^{n-1}}{n-1}\Big|_u^b-\frac{1}{n-1}\int\limits_u^b (v-u)^{n-1}dv=$$

$$=(u+b)\frac{(b-u)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{(n-1)n}(v-u)^n\Big|_u^b=\frac{(u+b)(b-u)^{n-1}}{n-1}-\frac{(b-u)^n}{n(n-1)}.$$

$$\frac{c}{n-1}\int_a^b (b+u)(b-u)^{n-1}du = \frac{c}{n-1}\left(\frac{(b+a)(b-a)^n}{n} + \frac{(b-a)^{n+1}}{n(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{b+a}{2} + \frac{(b-a)}{2(n+1)},$$

$$\frac{c}{n(n-1)}\int_a^b (b-u)^n du = \frac{c}{n(n-1)}\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{(b-a)}{2(n+1)}$$

При вычитании последнего выражения из предпоследнего получаем $\mathbb{E}Z = \frac{a+b}{2}$.

Для вычисления дисперсии $\mathbb{D}Z$ используем обозначение $c_1 = \frac{n(n-1)}{4(b-a)^n}$

$$\mathbb{E}Z^2 = \int_a^b du \int_u^b \frac{(u+v)^2}{4} f_{uv}(u,v)dv = \int_a^b du \int_u^b \frac{(u+v)^2}{4}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(v-u)^{n-2}dv =$$

$$= c_1 \int_a^b du \int_u^b (u+v)^2(v-u)^{n-2}dv.$$

Сначала рассмотрим внутренний интеграл

$$\int_u^b (u+v)^2(v-u)^{n-2}dv =$$

$$= \frac{(u+b)^2(b-u)^{n-1}}{n-1} - \frac{2(u+b)(b-u)^n}{n(n-1)} + \frac{2(b-u)^{n+1}}{(n-1)n(n+1)}$$

Затем внешний соберем из трех. Первый

$$\frac{c_1}{n-1}\int_a^b (u+b)^2(b-u)^{n-1}du =$$

$$= \frac{c_1}{n-1}\left(\frac{(b+a)^2(b-a)^n}{n} + \frac{2}{n}\left[\frac{(b+a)(b-a)^{n+1}}{n+1} + \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]\right) =$$

$$= \frac{(b+a)^2}{4} + \frac{(b^2-a^2)}{2(n+1)} + \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}$$

Второй

$$\frac{-2c_1}{n(n-1)}\int\limits_a^b (u+b)(b-u)^n du =$$

$$= \frac{-2c_1}{n(n-1)}\left(\frac{(b+a)(b-a)^{n+1}}{n+1} + \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= -\frac{(b^2-a^2)}{2(n+1)} - \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}$$

Третий

$$\frac{2c_1}{n(n-1)(n+1)}\int\limits_a^b (b-u)^{n+1} du = \frac{2c_1(b-a)^{n+2}}{n(n-1)(n+1)(n+2)} = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\mathbb{D}Z = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}$$

Дисперсия выборочного среднего равна $\frac{(b-a)^2}{12n}$, при $n = 2$ она совпадает с $\mathbb{D}Z$. При всех $n > 2$ имеем $\frac{(b-a)^2}{12n} > \mathbb{D}Z$, так как

$$2(n+1)(n+2) > 12n,$$

$$n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1) > 0$$

2.2. Минимум выборки в качестве оценки

Рассмотрим распределение случайной величины ξ с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} e^{a-x}, & x \geq a, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{9}$$

Вычислим функцию распределения

$$F(x) = \int\limits_a^x e^{a-t} dt = -e^{a-x}|_a^x = 1 - e^{a-x}\,.$$

Проверим основное свойство плотности и вычислим МО и дисперсию:

$$\int_a^{+\infty} e^{a-x}dx = -e^{a-x}|_a^{+\infty} = 1\,,$$

$$\mathbb{E}\xi = \int_a^{+\infty} xe^{a-x}dx = x(-e^{a-x})|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty}(-e^{a-x})dx = a+1\,,$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_a^{+\infty} x^2e^{a-x}dx = x^2(-e^{a-x})|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty}2x(-e^{a-x})dx = a^2+2(a+1),$$

$$\mathbb{D}\xi = a^2+2(a+1)-(a+1)^2 = 1\,.$$

Отсюда получаем, что дисперсия оценки $\hat{a} = \bar{x} - 1$ равна $\frac{1}{n}$.

Для моделирования величин с функцией распределения $F(x)$ можно воспользоваться методом обратных функций. Если взять равномерно распределенную на интервале $[0, 1]$ случайную величину ε, то функция распределения случайной величины $\eta = F^{-1}(\varepsilon)$ имеет вид

$$P\{F^{-1}(\varepsilon) < x\} = P\{\varepsilon < F(x)\} = F(x)\,,$$

$$\eta = a - \ln(\varepsilon)\,,$$

так как ε и $1-\varepsilon$ распределены одинаково.

Пусть имеется выборка наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ случайной величины ξ с плотностью (9). Задача состоит в том, чтобы сравнить оценки параметра $\hat{a} = \bar{x} - 1$ с оценкой $\tilde{a} = min(x_1, \ldots, x_n)$. Воспользуемся решением предыдущей задачи, где находился закон распределения величины

$U = min(x_1, \dots, x_n)$.

$$F_U(x) = 1 - (1 - F(x))^n = 1 - (1 - 1 + e^{a-x})^n = 1 - e^{n(a-x)},$$

$$f_u(x) = F'_U(x) = ne^{n(a-x)},$$

$$\mathbb{E}U = \int\limits_a^{+\infty} xne^{n(a-x)}dx = nx\left(-\frac{e^{n(a-x)}}{n}\right)|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} n\left(-\frac{e^{n(a-x)}}{n}\right)dx = a + \frac{1}{n},$$

$$\mathbb{D}U = \int\limits_a^{+\infty} x^2ne^{n(a-x)}dx - \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= nx^2\left(-\frac{e^{n(a-x)}}{n}\right)|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} 2xn\left(-\frac{e^{n(a-x)}}{n}\right)dx - \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= a^2 + \frac{2}{n}\left(a + \frac{1}{n}\right) - \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, дисперсия оценки $\tilde{a} = \frac{1}{n^2}$, и эта оценка эффективнее. Она асимптотически несмещенная и состоятельная.