Теорема Муавра-Лапласа

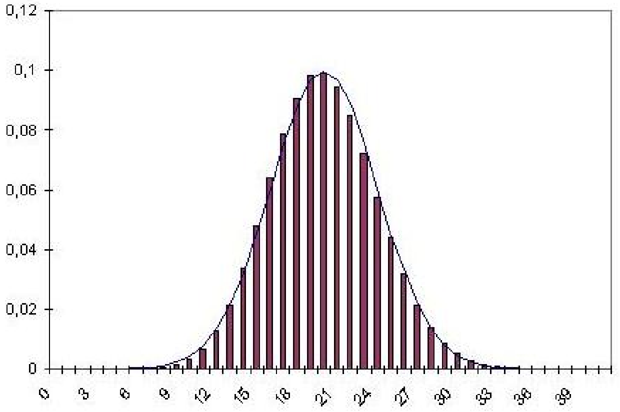


Рис.: Биномиальное распределение с параметрами n = 100 и p = 0.2

Теорема Муавра-Лапласа

Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение $\beta(\mathrm{x}|\mathrm{n},\mathrm{p})$. $\mu = \mathbb{E}\xi = \mathrm{np}$, $\sigma^2 = \mathbb{E}\xi = \mathrm{npq}$.
Для вычисления вероятности $\mathrm{P}\{\mathrm{a} < \xi < \mathrm{b}\}$ используют так называемую интегральную теорему Муавра-Лапласа.

$$\mathrm{P}\{\mathrm{a} < \xi < \mathrm{b}\} = \mathrm{F}(\mathrm{b}|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}) - \mathrm{F}(\mathrm{a}|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}),$$

где через $\mathrm{F}(\mathrm{x}|\mu,\sigma)$ обозначена функция нормального распределения. Например, при $\mathrm{n} = 30, \mathrm{p} = 0.2$ имеем $\mathrm{np} = 6, \sqrt{\mathrm{npq}} = 2.19$,

$$\mathrm{P}\{4 < \xi < 8\} = \mathrm{F}(8|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}) - \mathrm{F}(4|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}) = 0.6386.$$

Для вычисления $\mathrm{F}(\mathrm{x}|\mu,\sigma)$ и $\mathrm{f}(\mathrm{x}|\mu,\sigma)$ можно использовать функцию НОРМРАСП, в которой нужно указать соответствующие параметры среднего и стандартного отклонения, а также ИНТЕГРАЛЬНАЯ=1 или ИНТЕГРАЛЬНАЯ=0.

Решение задач на теорему Муавра-Лапласа

В коллективе 100 человек и начальник. Начальник выбирает правильное решение с вероятностью 0.95, а каждый член коллектива с вероятностью 0.8. Что лучше диктат или демократия?

Вычислим среднее $\mu = \mathrm{np} = 80$, стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathrm{npq}} = 4$ и вероятность правильного решения при демократии, то есть когда число правильных решений более половины, то есть

$$\mathrm{P}\{50 < \xi < +\infty\} = \mathrm{F}(+\infty|80, 4) - \mathrm{F}(50|80, 4) = 1 - 3 \cdot 10^{-14}\,.$$

Можно показать, что при вероятности правильного решения одного члена коллектива 0.585 уравниваются шансы диктатора и демократии.

В страховой компании застраховано 10000 лиц. Вероятность страхового случая равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 12 рублей в год, а в страховом случае компания платит 1000. Найти 1) вероятнсть того, что компания потерпит убыток, 2) компания получит прибыль менее 60000.

Применяем теорему Пуассона. Интенсивность $\lambda = \mathrm{np} = 10000 \cdot 0.006 = 60$. Обозначим ξ случайное число страховых случаев, а через $\mathrm{K} = 12 \cdot 10000/1000 = 120$ число страховых случаев, при котором компания потерпит убыток.

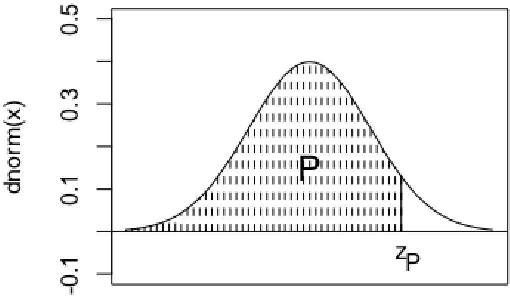
$$\mathrm{P}\{\xi > 120\} = 1 - \mathrm{F_p}(120|\lambda = 60) = 3 \cdot 10^{-12}.$$

При числе страховых случаев $\mathrm{K} < 60$ прибыль окажется более 60000. Вероятность этого события равна

$$\mathrm{P}\{\xi < 60\} = \mathrm{F_p}(60|\lambda = 60) = 0.53.$$

Квантиль распределения

Число z_P называется квантилью распределения с плотностью $f(x)$, если для $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ справедливо $P\{\xi \le z_P\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)du = P$.



Функция стандартного нормального распределения $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, то $\eta = \frac{\xi-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ и

$$P\{a < \xi \le b\} = P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{\xi-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

В ящике с $n = 100$ апельсинами вероятность бракованного $p = 0.1$. Чему равна вероятность того, что ξ случайное число бракованных больше $n_0 = 16$?

среднее $\mu = np = 10$, станд.отклонение $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0.9} = 3$
$P\{16 < \xi \le 100\} = \Phi\left(\frac{100-10}{3}\right) - \Phi\left(\frac{16-10}{3}\right) = \Phi(30) - \Phi(2) =$
$1 - 0.9772 = 0.0228$

Вычисление квантили $z_{0.975}$ стандартного нормального распределения

ссылка http://mystatbook.narod.ru/NormDist.txt

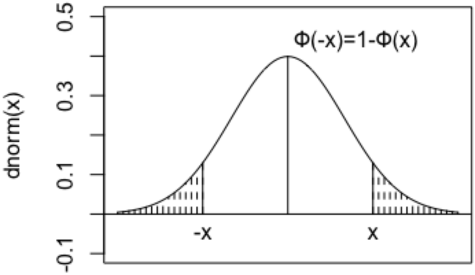
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	**0.06**	0.07	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.53
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.57
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.61
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.68
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.75
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.78
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.81
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.88
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.91
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.93
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.94
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.95
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.96
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	**0.9750**	0.9756	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.98
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.98
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.98
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.99
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.99

Рис.:

Вычисление $\Phi(x)$ при $x < 0$

$\xi \sim \mathcal{N}(10, 3)$. Чему равна $P\{4 < \xi \leq 16\}$?

$$P\{4 < \xi \leq 16\} = \Phi\left(\frac{16-10}{3}\right) - \Phi\left(\frac{4-10}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$
$$= 0.9772 - (1 - 0.9772) = 0.9545$$



Задачи для самостоятельного решения

1

Вероятность запомнить одно слово на уроке в процессе изучения иностранного языка равна $p = 0.4$. Какова вероятность, что из $n = 50$ новых слов ученик запомнит не менее 23 и не более 30.

2

Вероятность запомнить одно слово на уроке в процессе изучения иностранного языка равна $p = 0.75$. Какова вероятность, что из $n = 40$ новых слов ученик запомнит не менее 23.

Проверка

1

Вероятность запомнить одно слово на уроке в процессе изучения иностранного языка равна p = 0.4. Какова вероятность, что из n = 50 новых слов ученик запомнит не менее 23 и не более 30.

$\mu = \mathrm{np} = 20$, $\sigma = \sqrt{\mu \cdot 0.6} = \sqrt{12} = 3.46$, $\mathrm{a} = 23, \mathrm{b} = 30$.
$\mathrm{P}\{23 < \xi \leq 30\} = \Phi\left(\frac{30-20}{3.46}\right) - \Phi\left(\frac{23-20}{3.36}\right) = \Phi(2.89) - \Phi(0.87) =$
$0.9981 - 0.8068 = 0.1913$

2

Вероятность запомнить одно слово на уроке в процессе изучения иностранного языка равна p = 0.75. Какова вероятность, что из n = 40 новых слов ученик запомнит не менее 23.

$\mu = \mathrm{np} = 30$, $\sigma = \sqrt{\mu \cdot 0.25} = \sqrt{7.5} = 2.74$, $\mathrm{a} = 40, \mathrm{b} = 23$.
$\mathrm{P}\{23 < \xi \leq 40\} = \Phi\left(\frac{40-30}{2.74}\right) - \Phi\left(\frac{23-30}{2.74}\right) =$
$\Phi(3.65) - \Phi(-2.56) = 1 - (1 - 0.9946) = 0.9946$

Сколько необходимо провести испытаний, чтобы вероятность того, что отклонение относительной частоты успеха от его вероятности $p = \frac{2}{3}$ будет меньше $\delta = 0.01$, равна $P = 0.995$?

$x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, вероятность успеха p, $\mathbb{E}x_i = p$ и $\mathbb{D}x_i = pq$.

$\eta = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ – относительная частота

$$\mu = \mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}x_i = p,$$

$$\sigma^2 = \mathbb{D}\eta = \mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}x_i = \frac{pq}{n} = \frac{2}{9n}.$$

$$\mathrm{P}\{-\mathrm{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} < \varepsilon < \mathrm{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha = \mathrm{P},\ \text{где } \varepsilon = \frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}} \ \sim \mathcal{N}(0,1),$$

$$\mathrm{Q} = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1-\mathrm{P}}{2} = \frac{1+\mathrm{P}}{2} = \frac{1+0.995}{2} = 0.9975,\ \mathrm{z}_{\mathrm{Q}} = 2.81$$

	0.00	**0.01**	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
0.9	0.8159	0.8186	0.8212
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888
1.3	0.9032	0.9049	0.9066
1.4	0.9192	0.9207	0.9222
1.5	0.9332	0.9345	0.9357
1.6	0.9452	0.9463	0.9474
1.7	0.9554	0.9564	0.9573
1.8	0.9641	0.9649	0.9656
1.9	0.9713	0.9719	0.9726
2.0	0.9772	0.9778	0.9783
2.1	0.9821	0.9826	0.9830
2.2	0.9861	0.9864	0.9868
2.3	0.9893	0.9896	0.9898
2.4	0.9918	0.9920	0.9922
2.5	0.9938	0.9940	0.9941
2.6	0.9953	0.9955	0.9956
2.7	0.9965	0.9966	0.9967
2.8	0.9974	**0.9975**	0.9976
2.9	0.9981	0.9982	0.9982
3.0	0.9987	0.9987	0.9987

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\eta-\mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}\right|<\mathrm{z_Q}\right\}=0.995$$

$$\mathrm{P}\left\{|\eta-\mathrm{p}|<\mathrm{z_Q}\sqrt{\mathbb{D}\eta}\right\}=0.995$$

$$\mathrm{z_Q}\sqrt{\mathbb{D}\eta}=\delta \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2\cdot \mathrm{z_Q^2}}{9\mathrm{n}}=\delta^2$$

$$\mathrm{n}^2=\frac{2\cdot 2.81^2}{9\cdot 0.01^2}=17422.22,\quad \mathrm{n}\approx 132.$$

Решение задач на теорему Муавра-Лапласа

В каждом из 21 ящика содержится по $n = 100$ яблок. В случайно выбраном ящике обнаружили три бракованных яблока $\mu = 3$. Оценить с гарантированной вероятностью $P = 0.97$ количество бракованных яблок в оставшихся 20 ящиках.

$$P\{-z_Q < \frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z_Q\} = P, \text{ где } Q = \frac{1+P}{2}, z_Q = 2.17$$

Найдем граничные значения p, решив квадратное уравнение $(\mu - np)^2 = z_Q^2 np(1-p)$, $a = n^2 + z_Q^2 n$, $b = -z_Q^2 n + 2\mu n$, $c = \mu^2$
$10471p^2 - 1071p + 9 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 769936$,
$p = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \in \{0.009, 0.093\}$. Следовательно, среди $N = 2000$ яблок бракованных будет от 18 до 186 яблок.

Для самостоятельного решения

При проверке коробки с 300 персиками обнаружили 20 испорченных. Найти с вероятностью 0.82 границы испорченных персиков в 50 аналогичных коробках. (от 747 до 1330)

Урновая схема

В группе 20 человек, из которых 5 пришли с температурой. К доске вызваны трое. Чему равна вероятность того, что среди них будет хотя бы один больной?

Всего как шаров в урне $N = 20$, из них $M = 5$ больных как красных шаров. Выбираем наугад $n = 3$. Обозначим через P_k вероятность того, что из n вызванных к доске больных равно k. Нужно найти вероятность

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} + \frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_5^3 C_{15}^0}{C_{20}^3} =$$

$$= 0.4605 + 0.1316 + 0.0088 = 0.6009$$

$$1 - P_0 = \frac{C_5^0 C_{15}^3}{C_{20}^3} = 1 - 0.3991 = 0.6009$$

Решение задач на повторение

На формулу Байеса

Известно, что 5% мужчин дальтоники, и 0.25 % женщин дальтоники. В обществе из 60 женщин и 40 мужчин наугад выбраное лицо является дальтоником. Чему равна вероятность, что это мужчина?

Полная группа событий: A_1 - случайно выбрали мужчину, A_2 женщину. Априорные вероятности: $P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.6$. Событие B – вышел дальтоник. Условные вероятности: $P(B|A1) = 0.05, P(B|A_2) = 0.0025$.

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.05 + 0.6 \cdot 0.0025 = 0.0200 + 0.0015 = 0.0215,$$

$$P(A_1|B) = \frac{0.0200}{0.0215} = 0.93$$

Решение задач на повторение

На биномиальное распределение

На выступлении фокусника одна четвертая зала занята его помощниками. На сцену приглашены трое. Чему равна вероятность того, что среди них будет хотя бы один помощник?

Вероятность успеха, то есть приглашения на сцену своего помощника, равна $p = 0.25$, вероятность неудачи $q = 0.75$. Случайно выбрано $n = 3$. Обозначим через P_k вероятность того, что из $n = 3$ приглашенных окажется k помощников. Нужно найти вероятность

$$P_1 + P_2 + P_3 = C_3^1 p^1 q^2 + C_3^2 p^2 q^1 + C_3^3 p^3 q^0 =$$
$$= 0.421875 + 0.140625 + 0.015625 = 0.578125$$
$$1 - P_0 = 1 - C_3^0 p^0 q^3 = 1 - 0.421875 = 0.578125$$

Примеры задач на повторение

В коробке из 50 конфет 10 с вафлями внутри. Вы выбираете наугад 5. Чему равна вероятность того, что достанутся две вафли?

В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Девочки записываются на урок домоводства с вероятностью 0.9, мальчики с вероятностью 0.3. Кто-то сегодня записался. Чему рава вероятность, что это мальчик?

Вероятность встретить контролера в вагоне равна 0.8. Чему равна вероятность его встретить только один раз за пять поездок?

Решение задач на повторение

На распределение Пуассона

Какова вероятность того, что из 1460 людей не более 3 родились 31 декабря?

Имеем $n = 1460$, $p = \frac{1}{365}$, $\lambda = np = \frac{1460}{365} = 4$. Пусть ξ случайное число людей, родившихся 31 декабря.

$$P\{\xi \leq 3\} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = e^{-4} \cdot \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right) =$$
$$= 0.0183156 \cdot \left(1 + 4 + 8 + 10\frac{2}{3}\right) = 0.4334$$

Человек, заболевший гриппом, получает осложнение с вероятностью $p = 0.05$. Какова вероятность, что из $n = 110$ заболевших осложнение получат не более трех?

Среднее и дисперсия

Анализируя собственную успеваемость, ученик обнаружил, что вероятность получить за контрольную двойку у него 0.1, тройку 0.3, четверку 0.4 и пятерку 0.2. Какая оценка ожидается на следующей контрольной? Чему равна дисперсия?

$$\xi : \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbb{E}\xi = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.2 = 0.2 + 0.9 + 1.6 + 1 = 3.7$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = 2^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.2 =$$

$$= 0.4 + 2.7 + 6.4 + 5 = 14.5$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 14.5 - 3.7^2 = 0.81$$

Решение задач на повторение

У брата распределение оценок оказалось другим.

$$\xi : \left\{ \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{array} \right\}$$

Кто учится лучше? И у кого меньше вариабельность?

Характеристики распределений

Найти $\mathbb{E}\xi, \mathbb{D}\xi, \sigma$ случайной величины с функцией распределения
$\left(\begin{array}{c|ccc} x_i & -2 & 0 & 3 \\ \hline p_i & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{array}\right)$

$$\mathbb{E}\xi = 0.6 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 = 0.1$$
$$\mathbb{E}\xi^2 = (-2)^2 \cdot 0.4 + 0^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.3 = 1.6 + 2.7 = 4.3$$
$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 4.3 - 0.1^2 = 4.29$$
$$\sigma = \sqrt{4.29} = 2.071$$

Стрелок, попадающий в цель с вероятностью $p = 0.6$ производит не более 4-х выстрелов до первого промаха. Пусть ξ число попаданий. Найти $\mathbb{E}\xi, \mathbb{D}\xi, \sigma$. $\left(\begin{array}{c|ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p_i & q & pq & p^2q & p^3q & p^4 \end{array}\right)$

$$\mathbb{E}\xi = pq + 2p^2q + 3p^3q + 4p^4 = 1.3056$$
$$\mathbb{E}\xi^2 = pq + 2^2p^2q + 3^2p^3q + 4^2p^4 = 3.6672$$
$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 3.6672 - 1.3056^2 = 1.96$$
$$\sigma = \sqrt{1.96} = 1.4$$