Функция распределения

Функцией распределения называется функция $F(x) = P\{\xi \leq x\}$, зависящая от $x \in (-\infty, +\infty)$.

Свойства функции распределения

- неубывающая
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

$$P\{a < \xi \leq b\} = F(b) - F(a)$$

Биномиальное распределение с $p = \frac{1}{6}, n = 4.$

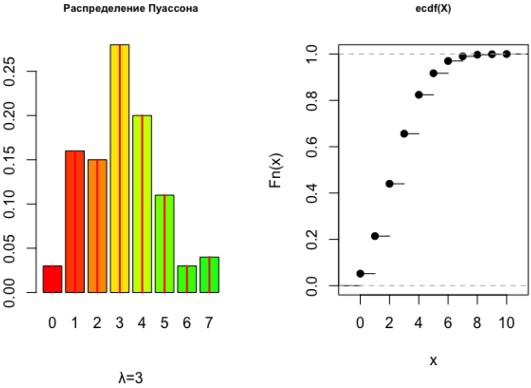
$P_0 = 0.482,$
$P_1 = 0.386,$
$P_2 = 0.116,$
$P_3 = 0.015,$
$P_4 = 0.001.$

x	$F(x) = P\{\xi < x\}$
$(-\infty, 0)$	0
$[0, 1)$	$P_0 = 0.482$
$[1, 2)$	$P_0 + P_1 = 0.868$
$[2, 3)$	$P_0 + P_1 + P_2 = 0.984$
$[3, 4)$	$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0.999$
$[4, +\text{infty})$	$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

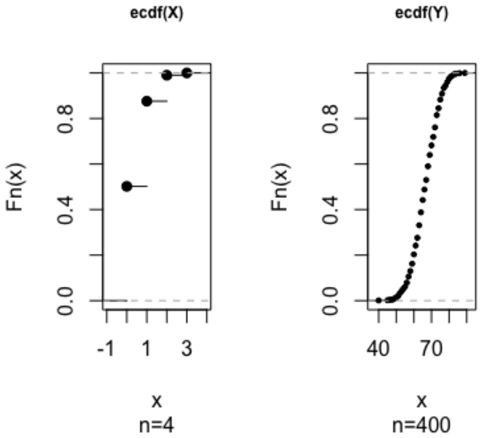
$$P\{1 < \xi \leq 3\} = F(3) - F(1) = 0.999 - 0.868 = 0.131 = P_2 + P_3$$

Функция распределения Пуассона $P\{\xi = j\} = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$

$$F(x) = P\{\xi \le x\} = \sum_{j=0}^{x} P\{\xi = j\} = \sum_{j=0}^{x} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{x}\frac{\lambda^j}{j!}$$



Функции биномиального распределения



Непрерывные случайные величины

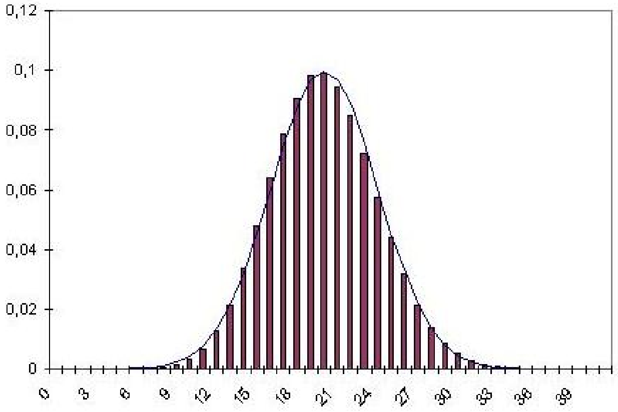
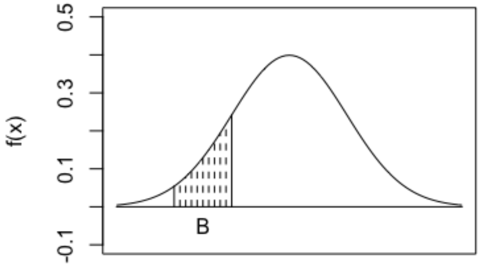


Рис.: Биномиальное распределение с параметрами n = 100 и p = 0.2

Абсолютно непрерывные величины

Распределение случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, если существует функция $f(x) \geq 0$, которая называется плотностью распределения, такая, что

$$P\{\xi \in B\} = \int_B f(x)dx \,. \tag{1}$$



Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ если

$$f(x) = F'(x).$$

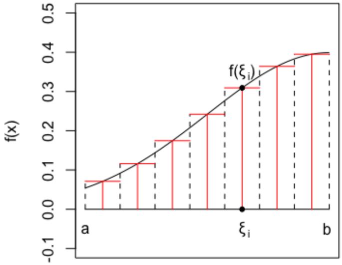
Множество всех первообразных некоторой функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается как $\int f(x)dx = F(x) + c$, где c некоторая постоянная.

Например, $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$.

Определенный интеграл

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина частичного отрезка.
$\lambda = \sup \Delta x_i$— максимальная из длин частичных отрезков.
$\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$



Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, тогда $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим предел при $h \to 0$ выражения $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$

$$= \frac{1}{h}\left(\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)dt \approx$$

$$\approx \frac{f(x)h}{h} = f(x)\,.$$

$\Phi(x)$ — произвольная первообразная $f(x)$, т.е.
$\Phi(x) = F(x) + C, \implies \Phi(a) = \underbrace{F(a)}_{=0} + C, \implies C = \Phi(a)\,.$

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

Свойства плотности распределения

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$,
- $f(x) = F'(x)$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1\,.$
- $P\{a < \xi \leq b\} = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Плотность линейного преобразования $\eta = a\xi + b$ может быть выражена из плотности $f_\xi(x)$,

$$F_\eta(x) = P\{\eta \leq x\} = P\{a\xi + b \leq x\} = P\left\{\xi \leq \frac{x-b}{a}\right\} = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Характеристики абсолютно непрерывного распределения

МО и дисперсия абсолютно непрерывной величины ξ с плотностью $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ вычисляются по формулам

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}\,,$$

$$\mathbb{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{x} - \mathbb{E}\xi)^2 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}^2 \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} - (\mathbb{E}\xi)^2\,,$$

Квадратный корень из дисперсии носит название стандартного отклонения.

Равномерное распределение.

Случайная величина ξ равномерно распределена на интервале $[a, b]$, если ее плотность распределения имеет вид $f(x) = \frac{1}{b-a}$ на интервале $[a, b]$ и равна нулю вне этого интервала. МО равно середине интервала, дисперсия пропорциональна длине интервала.

$$\mathbb{E}\xi = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормальное распределение. МО и дисперсия.

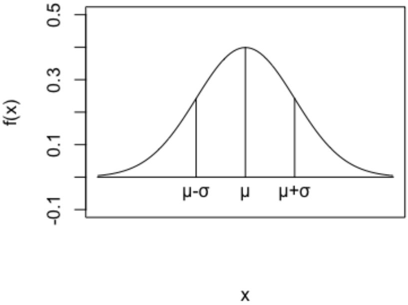


Рис.: Плотность $f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ нормального распределения с параметрами среднего μ и дисперсии σ.

Распределение при $\mu = 0, \sigma = 1$ стандартное нормальное.

Теорема Муавра-Лапласа

Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение $\beta(\mathrm{x}|\mathrm{n},\mathrm{p})$. $\mu = \mathbb{E}\xi = \mathrm{np}$, $\sigma^2 = \mathbb{E}\xi = \mathrm{npq}$. Для вычисления вероятности $\mathrm{P}\{\mathrm{a} < \xi < \mathrm{b}\}$ используют так называемую интегральную теорему Муавра-Лапласа.

$$\mathrm{P}\{\mathrm{a} < \xi < \mathrm{b}\} = \mathrm{F}(\mathrm{b}|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}) - \mathrm{F}(\mathrm{a}|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}),$$

где через $\mathrm{F}(\mathrm{x}|\mu,\sigma)$ обозначена функция нормального распределения. Например, при $\mathrm{n} = 30, \mathrm{p} = 0.2$ имеем $\mathrm{np} = 6, \sqrt{\mathrm{npq}} = 2.19$,

$$\mathrm{P}\{4 < \xi < 8\} = \mathrm{F}(8|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}) - \mathrm{F}(4|\mathrm{np}, \sqrt{\mathrm{npq}}) = 0.6386.$$

Для вычисления $\mathrm{F}(\mathrm{x}|\mu,\sigma)$ и $\mathrm{f}(\mathrm{x}|\mu,\sigma)$ можно использовать функцию НОРМРАСП, в которой нужно указать соответствующие параметры среднего и стандартного отклонения, а также ИНТЕГРАЛЬНАЯ=1 или ИНТЕГРАЛЬНАЯ=0.

Решение задач на теорему Муавра-Лапласа

В коллективе 100 человек и начальник. Начальник выбирает правильное решение с вероятностью 0.95, а каждый член коллектива с вероятностью 0.8. Что лучше диктат или демократия?

Вычислим среднее $\mu = \mathrm{np} = 80$, стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathrm{npq}} = 4$ и вероятность правильного решения при демократии, то есть когда число правильных решений более половины, то есть

$$\mathrm{P}\{50 < \xi < +\infty\} = \mathrm{F}(+\infty|80, 4) - \mathrm{F}(50|80, 4) = 1 - 3 \cdot 10^{-14}\,.$$

Можно показать, что при вероятности правильного решения одного члена коллектива 0.585 уравниваются шансы диктатора и демократии.

В страховой компании застраховано 10000 лиц. Вероятность страхового случая равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 12 рублей в год, а в страховом случае компания платит 1000. Найти 1) вероятнтсть того, что компания потерпит убыток, 2) компания получит прибыль менее 60000.

Применяем теорему Пуассона. Интенсивность $\lambda = \mathrm{np} = 10000 \cdot 0.006 = 60$. Обозначим ξ случайное число страховых случаев, а через $\mathrm{K} = 12 \cdot 10000/1000 = 120$ число страховых случаев, при котором компания потерпит убыток.

$$\mathrm{P}\{\xi > 120\} = 1 - \mathrm{F_p}(120|\lambda = 60) = 3 \cdot 10^{-12}.$$

При $\mathrm{K} < 60$ прибыль окажется более 60000. Вероятность этого события равна

$$\mathrm{P}\{\xi < 60\} = \mathrm{F_p}(60|\lambda = 60) = 0.53.$$