Характеристики распределения: математическое ожидание

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\,. \tag{1}$$

Математическое ожидание (МО) или среднее значение

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

МО случайной величины с распределением Бернулли

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad q + p = 1$$

равно $0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Свойства математического ожидания

Математическое ожидание линейной комбинации

$$\mathbb{E}(a\xi + b) = \sum_{i=1}^{\infty}(ax_i + b)p_i = a\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i + \sum_{i=1}^{\infty}bp_i = a\mathbb{E}\xi + b. \quad (2)$$

МО суммы двух случайных величин ξ и η равно сумме их математических ожиданий.

$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j)P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} + \sum_i \sum_j y_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} + \sum_j y_j \sum_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} =$$

$$= \sum_i x_i P\{\xi = x_i\} + \sum_j y_j P\{\eta = y_j\} = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta\,.$$

Математическое ожидание биномиального распределения

- Первый способ

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} =$$

$$\{k-1=i, \quad k=i+1\} \qquad = np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} p^i q^{n-1-i} = np.$$

- Второй способ

$\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, где $\eta_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}\eta_j = p$, поэтому

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\eta_1 + \ldots + \eta_n) = \mathbb{E}\eta_1 + \ldots \mathbb{E}\eta_n = np\,.$$

Свойства математического ожидания

МО произведения двух независимых случайных величин ξ и η равно произведению их математических ожиданий.

$$\mathbb{E}\xi\eta = \sum_{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{x_i y_j P}\{\xi = \mathrm{x_i}, \eta = \mathrm{y_j}\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{x_i y_j P}\{\xi = \mathrm{x_i}\}\mathrm{P}\{\eta = \mathrm{y_j}\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{x_i P}\{\xi = \mathrm{x_i}\} \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{y_j P}\{\eta = \mathrm{y_j}\} = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta\,.$$

Характеристика вариабельности данных

Дисперсия

$$\sigma^2 = \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2\,, \quad (3)$$

σ стандартное отклонение

Если $\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{q} & \mathrm{p} \end{pmatrix}$ имеет распределение Бернулли, то

$$\mathbb{E}\xi^2 = 0^2 \cdot \mathrm{q} + 1^2 \cdot \mathrm{p} = \mathrm{p},$$
$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathrm{p} - \mathrm{p}^2 = \mathrm{pq}\,.$$

Свойства дисперсии

Дисперсия линейного преобразованияи $a\xi + b$ не зависит от сдвига и отличется на a^2

$$\mathbb{D}(a\xi + b) = \mathbb{E}((a\xi + b) - \mathbb{E}(a\xi + b))^2 = a^2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = a^2\mathbb{D}\xi$$

Заметим, что дисперсия константы равна нулю.

$$\mathbb{D}c = \mathbb{E}(c - \mathbb{E}c) = 0\,.$$

Свойства дисперсии

Дисперсия суммы двух случайных величин ξ_1, ξ_2 равна

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\xi_1+\xi_2) = \mathbb{E}((\xi_1+\xi_2)-\mathbb{E}(\xi_1+\xi_2))^2 = \\ = \mathbb{E}((\xi_1-\mathbb{E}\xi_1)+(\xi_2-\mathbb{E}\xi_2))^2 = \\ = \mathbb{E}(\xi_1-\mathbb{E}\xi_1)^2+\mathbb{E}(\xi_2-\mathbb{E}\xi_2)^2+2\underbrace{\mathbb{E}(\xi_1-\mathbb{E}\xi_1)(\xi_2-\mathbb{E}\xi_2)}_{\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)} \end{aligned}$$

Если величины ξ_1, ξ_2 независимы, то ковариация

$$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1-\mathbb{E}\xi_1)(\xi_2-\mathbb{E}\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1-\mathbb{E}\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2-\mathbb{E}\xi_2) = 0.$$

Дисперсия биномиального распределения

Из независимости бернуллиевских величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и из того, что $D\eta_j = pq$

$$\mathbb{D}(\eta_1 + \ldots + \eta_n) = \mathbb{D}\eta_1 + \ldots + \mathbb{D}\eta_n = npq$$

МО и дисперсия распределения Пуассона

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны λ, так как

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda\,.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \overset{k=t+1}{=} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1)\lambda^{t+1}}{t!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda\,.$$

Примеры задач

В партии из 1000 ламп 20 бракованных. Чему равны МО и дисперсия бракованных изделий при покупке 30 ламп?

ξ случайное число бракованных ламп в партии $\mathrm{n} = 30$ с вероятностью брака $\mathrm{p} = \frac{20}{1000} = 0.02$.
$\mathbb{E}\xi = \mathrm{np} = 30 \cdot 0.02 = 0.6$, $\mathbb{D}\xi = \mathrm{npq} = 30 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 0.588$.

В другой партии из 1000 ламп 40 бракованных. Чему равны МО и дисперсия бракованных изделий при покупке 50 ламп? В какой из покупок больше среднее и дисперсия?

$\mathbb{E}\eta = 50 \cdot 0.04 = 2, \mathbb{D}\xi = \mathrm{npq} = 50 \cdot 0.04 \cdot 0.96 = 1.92$.

Примеры задач

В группе из 10 человек 1 перворазрядник, два со вторым разрядом, остальные семь с третьим. Вероятности взять высоту равны соответственно 0.9, 0.8 и 0.7. Кто-то из группы взял высоту. Чему равна вероятность того, что это был перворазрядник?

Полная группа событий и априорные вероятности: $\mathrm{P}(\mathrm{A}1) = 0.1, \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = 0.2, \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) = 0.3$. Событие B – высота взята.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0.1 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.8 + 0/7 \cdot 0.7 = 0.09 + 0.16 + 0.49 = 0.74$$

Апостериорная вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{B}) = \frac{0.09}{0.74} = 0.12$. Наибольшая апостериорная вероятность равна $0.66 = \frac{0.49}{0.74}$ и соответствует третьему разряду.