## Задача 1

Пусть A, B, C три произвольных события одного испытания. Например, A высота взята первый раз, B второй, C третий. Выразите через них следующие события: а) произошли только два из указанных исхода, б) произошло не более двух из них, в) ни одно из событий не произошло.

Ответ.

а) $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$ — две успешные попытки.

б) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$ — три или две неудачи.

в) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ — все неудачно.

## Задача 2

Из карточек с буквами Ф, И, З, К, У, Л, Ь, Т, У, Р, А выбираются наугад четыре и приставляются друг к другу. Чему равна вероятность того, что получится слово КУРА?

Эта задача на произведение зависимых событий $P(AB) = P(A)P(B|A)$. Слово КУРА получится, если на первое место мы выберем букву К – она одна из 11 букв, вероятность $1/11$, на второе У – это событие произойдет с вероятностью $2/10$ – букв осталось только 10, буква Р на третьем месте окажется с вероятностью $1/9$ и буква А на четвертом с вероятностью $1/8$. Если перемножить эти вероятности, то получится число $\frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = 0.00025$. Формально это можно выразить так:

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot P(A_4|A_1A_2A_3)$$

# Урновая схема

Пусть в урне N шаров, среди которых M красных, вынимают наугад n шаров без возвращения. Вероятность того, среди n вынутых шаров окажутся из m красных, равна

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Пусть в урне $M_1$ красных, $M_2$ белых и $M_3$ черных шаров, $N = M_1 + M_2 + M_3$, то вероятность того, что из $n = m_1 + m_2 + m_3$ наугад вынутых шаров окажутся соответственно $m_1$ красных, $m_2$ белых и $m_3$ черных шаров, равна

$$\frac{C_{M_1}^{m_1} C_{M_2}^{m_2} C_{M_3}^{m_3}}{C_{M_1+M_2+M_3}^{m_1+m_2+m_3}}.$$

## Задача 3

В лотерее 100 билетов, среди которых выигрыши 1 – 500 рублей, 3 по 250, 6 по 100 и 15 по 30. Найти 1) вероятность $p_1$ выиграть не менее 250 рублей владельцу одного билета, 2) $p_2$ ничего не выиграть, 3) $p_3$ что-то выиграть, 4) $p_4$ ничего не выиграть по трем билетам, 5) $p_5$ ничего не выиграть по пяти билетам.

Выигрыш не менее 250 рублей (1 вариант 500 и 3 варианта по 250) осуществляется с вероятностью $p_1 = \frac{4}{100}$.

$$p_2 = \frac{1+3+6+15}{100} = 0.25, \quad p_3 = 0.75.$$

$$p_4 = \frac{C_{75}^3 C_{25}^0}{C_{100}^3} = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{100 \cdot 99 \cdot 98} = 0.4176\,, \quad p_5 = \frac{C_{75}^5 C_{25}^0}{C_{100}^5} = 0.2292.$$

## Задача 4

Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Найти вероятность того, что три определенных тома окажутся рядом в определенном порядке.

Общее число исходов равно числу перестановок 10!. Три тома, идущие подряд, могут начинаться с 1, 2,..., 8-го места, для остальных томов возможно расположение 7! способами. Таким образом, ответ $\frac{8 \cdot 7!}{10!} = \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{90}$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & * & * & * & * & * & * & * \\
* & 1 & 2 & 3 & * & * & * & * & * & * \\
* & * & 1 & 2 & 3 & * & * & * & * & * \\
* & * & * & 1 & 2 & 3 & * & * & * & * \\
* & * & * & * & 1 & 2 & 3 & * & * & * \\
* & * & * & * & * & 1 & 2 & 3 & * & * \\
* & * & * & * & * & * & 1 & 2 & 3 & * \\
* & * & * & * & * & * & * & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

## Задача 5

Из колоды 52 карт наугад извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

В колоде $52 = 4 + 4 + 4 + 40$ четыре тройки, четыре семерки, четыре туза и 40 карт остального вида. Вынимаются три $3 = 1 + 1 + 1 + 0$.

$$\frac{C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_{40}^0}{C_{52}^3} = \frac{4^3 \cdot 3!}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 0.002895\,.$$

## Задача 6

Номер автомашины состоит из 3 букв 30 букв алфавита и 4 цифр. 1) Сколько различных номеров можно составить при условии, что цифры и буквы в отдельном номере не будут повторяться? 2) Какова вероятность того, что все буквы и цифры в номере различны?

Общее число номеров $\mathrm{M} = 30^3 \cdot 10^4$, число вариантов без повторений равно $\mathrm{M}_1 = (30 \cdot 29 \cdot 28) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)$,

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}} = \frac{(30 \cdot 29 \cdot 28) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)}{30^3 \cdot 10^4} = 0.455\,.$$

## Задача 7

Какова вероятность, что из выбранных наугад 7 карт из колоды, содержащей 32 карты, окажутся 1) три карты красной масти и четыре черной? 2) четыре туза, два короля и дама?

Общее число исходов $N = C_{32}^{7}$.

1) $\frac{C_{16}^{3} \cdot C_{16}^{4}}{C_{32}^{7}}$.

2) $\frac{C_{4}^{4} \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{4}^{1} \cdot C_{20}^{0}}{C_{32}^{7}}$.

## Задача 8

Три стрелка A, B, C независимо друг от друга выстрелили по мишени. Вероятности попадания для кадого стрелка равны $P(A) = 1/2, P(B) = 1/3, P(C) = 1/4$. Каковы вероятности событий: 1) ни одна из пулей не попала в цель, 2) одна пуля попала в цель, 3) две пули попали в цель, 4) по крайней мере одна пуля попала в цель, 5) все три попали.

$$1)\ \ p_0 = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$2)\ \ p_1 = P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{24},$$

$$3)\ \ p_2 = P(\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$4)\ \ 1 - p_0 = \frac{3}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{24}.$$

## Задача 9

Какова вероятность, что дни рождения 10 студентов приходятся на 1) разные дни невисокосного года ($p_1$), 2) разные дни января ($p_2$), 3) на февраль ($p_3$)?

Общее число исходов равно $365^{10}$. Число исходов, соответствующих разным дням невисокосного года, равно $A_{365}^{10} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 356$, $p_1 = \frac{A_{365}^{10}}{365^{10}}$,
разные дни января $p_2 = \frac{A_{31}^{10}}{365^{10}}$,
на февраль $p_3 = \frac{28^{10}}{365^{10}}$.

## Задача 10

В игре в преферанс используется колода в 32 карты. Трем игрокам сдается по 10 карт и 2 карты идут в прикуп. Какова вероятность того, что обе карты в прикупе будут тузами, а одному игроку достанутся четыре семерки?

Общее число исходов $N = C_{32}^{2} C_{30}^{10} C_{20}^{10} C_{10}^{10}$, число благоприятствующих исходов равно $M = C_4^2 C_3^1 C_4^4 C_{26}^6 C_{20}^{10} C_{10}^{10}$. Ответ $P = \frac{M}{N} = \frac{1}{3496} \approx 0.0003$.

# Задачи на проверку

## 1

Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке? Варианты ответа: 1) 25, 2) 125, 3) 120, 4) 24.

## 2

Вероятность четкого броска у баскетболиста равна $p = 0.75$. Он сделал $n = 5$ бросков. Чему равны вероятности: $P_1$ - первый раз промахнуться, а потом все точно, $P_2$ промахнуться всего один раз, $P_3$ все броски точные, $P_4$ хоть раз, но промахнуться. Сопоставьте правильные ответы.

| | |
|---|---|
| A) $1 - p^5$ | $P_1$ |
| B) $p^5$ | $P_2$ |
| C) $qp^4$ | $P_3$ |
| D) $5qp^4$ | $P_4$ |

# Задачи на проверку

## 3

В группе из 10 человек половина перворазрядники, три мастера спорта и двое любителей. К доске вызваны три человека. Чему равна вероятность, что это все три мастера спорта? Отметьте правильные решения.
1) $\frac{3}{7}$, 2) $\frac{3}{10}$, 3) $\frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3}$, 4) $\frac{1}{120}$.

## 4

В лотерейном билете, состоящем из 36 чисел, нужно отметить шесть чисел. Какова вероятность угадать 1) все шесть номеров, 2) пять из них, 3) четыре из них, 4) не более трех?

# Формула полной вероятности

## Полная группа событий

События $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу событий, если они несовместны ($A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j$), и какое-то из них обязательно произойдет ($A_1 + \ldots + A_n = \Omega$).

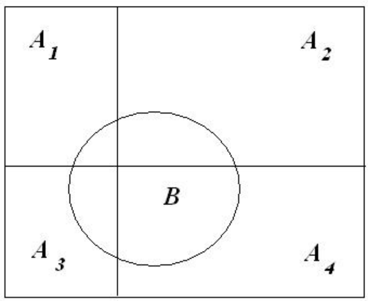
Очевидно, $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Пример. Событие $A_i$ — случайно выбранный человек имеет $i$-ю группу крови, $i = 1, 2, 3, 4$. Априорные вероятности $P(A_1) = 0.337, P(A_2) = 0.375, P(A_3) = 0.209, P(A_4) = 0.079$.

# Формула полной вероятности

$B = BA_1 + \ldots + BA_n$

Например, событие B — человек остался жив после случайного переливания крови.




$$P(B) = P(BA_1) + \ldots + P(BA_n) =$$
$$= P(B|A_1)P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n).$$

# Пример формулы полной вероятности

Вероятности выживания:

- с первой группой крови $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = 0.337$,
- со второй $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = 0.337 + 0.375 = 0.712$.
- с третьей $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) = 0.337 + 0.209 = 0.546$.
- с четвертой $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_4) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_4)\mathrm{P}(\mathrm{A}_4) = \\ = 0.337 \cdot 0.337 + 0.712 \cdot 0.375 + 0.546 \cdot 0.209 + 1 \cdot 0.079 = \\ = 0.1136 + 0.2671 + 0.1141 + 0.0790 = 0.5737. \end{aligned}$$

# Формула Байеса

Апостериорные вероятности $\mathrm{P}(\mathrm{A_k}|\mathrm{B}),\ \mathrm{k}=1,2,\ldots,\mathrm{n}$, по формуле условной вероятности имеют вид

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_k}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A_k B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A_k})\mathrm{P}(\mathrm{A_k})}{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A_i})\mathrm{P}(\mathrm{A_i})}\,.$$

Доли представителей каждой группы крови среди выживших после случайного переливания крови:
$\mathrm{P}(\mathrm{A_1}|\mathrm{B}) = 0.1980$, $\mathrm{P}(\mathrm{A_2}|\mathrm{B}) = 0.4654$, $\mathrm{P}(\mathrm{A_3}|\mathrm{B}) = 0.1999$,
$\mathrm{P}(\mathrm{A_4}|\mathrm{B}) = 0.1387$.

# Как относиться к прохой флюроографии

Надежность выявления туберкулеза при флюрофотометрии равна 90%. Вероятность ошибочного диагноза равна 1%. Распространенность туберкулеза равна 0.1%. Чему равна вероятность того. что человек с "плохой" флюрофотометрией на самом деле болен?

Полная группа событий: $A_1$ – человек здоров, $A_2$ – болен.
Априорные вероятности: $P(A_1) = 0.999$, $P(A_2) = 0.001$.
Событие B – "‘плохая"’ флюрофотометрия.
Если человек здоров, то вероятность "плохой" флюрофотометрии равна 1%, то есть $P(B|A_1) = 0.01$. Если человек болен, то $P(B|A_2) = 0.9$.

$P(B) = 0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 0.9 = 0.00999 + 0.0009 = 0.01089.$

$P(A_2|B) = \frac{0.0009}{0.0189} = 0.0826.$
Больными на самом деле оказываются 8% лиц .

# Задача на теннисные мячи

В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 игранных. Из него извлекают случайно два мяча для игры и возвращают обратно. После этого снова случайно вынимают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что последние два мяча будут неигранными.

- $A_1$ вынуты два игранных мача, осталось новых 12, играных 8; $P(A_1) = \frac{C_8^2 C_{12}^0}{C_{20}^2} = 0.1474$;
- $A_2$ вынут один новый и один игранный, осталось новых 11, играных 9; $P(A_2) = \frac{C_8^1 C_{12}^1}{C_{20}^2} = 0.5053$;
- $A_3$ вынуты два новых, осталось новых 10, играных 10; $P(A_1) = \frac{C_8^0 C_{12}^2}{C_{20}^2} = 0.3473$.

Обозначим через B событие, которое заключается в том, что вынутые во второй раз два мяча окажутся неигранными.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1) = \frac{\mathrm{C}_8^0 \mathrm{C}_{12}^2}{\mathrm{C}_{20}^2} = 0.3474, \quad \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2) = \frac{\mathrm{C}_9^0 \mathrm{C}_{11}^2}{\mathrm{C}_{20}^2} = 0.2895$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_3) = \frac{\mathrm{C}_{10}^0 \mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{20}^2} = 0.2368.$$

Используем формулу полной вероятности.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_3)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3) = 0.2797$$

# Игра в домино

Из полного набора костей домино наугад выбираются две кости. Чему равна вероятность события B, означающего, что вторую кость можно приставить к первой?

Полная группа событий, $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$:
$A_1$ первая кость вида $(a, a)$, $P(A_1) = \frac{7}{28}$, $P(B|A_1) = \frac{6}{27}$.
$A_2$ первая кость вида $(a, b)$, $P(A_2) = \frac{21}{28}$, $P(B|A_2) = \frac{12}{27}$.
Число возможных исходов $27 = 28 - 1$.
Если первая кость $(a, a)$, то вторая кость должна иметь a – таких может быть шесть $(b = 0, 1, \ldots, 6, \quad \text{но } b \neq a)$.
Если первая кость вида $(a, b)$, то ей подойдут 12 костей, например, если $a = 1, b = 0$, то им подойдут шесть костей вида $(1, 1), (1, 2), (1, 3, (1, 4), (1, 5), (1, 6)$ и шесть костей вида $(0, 0), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6)$.

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{7}{28} \cdot \frac{6}{27} + \frac{21}{28} \cdot \frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

## Про ящур

На двух фермах A и B произошла вспышка заболевания ящуром. Доли зараженного скота равны соответственно $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{4}$. Из каждой фермы отбирают по одной корове. Какова вероятность того, что больна только одна изх них? Если заражена одна, то чему равна вероятность того, что эта корова с фермы A?

Обозначим через C событие, что из двух отобранных коров больна одна. Это возможно, если корова из первой фермы больная, а из второй здоровая, или наоборот, из первой здоровая, а из второй больная.

$$\mathrm{P(C)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3} = \mathrm{P(CA)} + \mathrm{P(CB)}\,.$$

$$\mathrm{P(A|C)} = \frac{\mathrm{P(AC)}}{\mathrm{P(C)}} = \frac{3/24}{8/24} = \frac{3}{8}\,.$$

# Кто попал

Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, а стрелок B с вероятностью 0.5. Стрелки одновременно выстрелили в мишень, и одна пуля попала в цель. Найти вероятность того, что стрелок B попал в цель.

Обозначим через C событие, что один из двух выстрелов успешен. Это возможно, если первый стрелок попал, а второй нет, или наоборот.

$$\mathrm{P}(C) = 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.3 + 0.2 = 0.5 = \mathrm{P}(CA) + \mathrm{P}(CB)\,.$$

$$\mathrm{P}(B|C) = \frac{\mathrm{P}(BC)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4\,.$$