Случайные события и их свойства

Типы событий

- Достоверное (Ω), случайное ($A, B, C, \ldots$), невозможное $\emptyset$.
- Совместные, несовместные.
- Сумма, произведение, противоположное событие.
- Зависимые, независимые.

Классическая вероятностная схема

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ множество элементарных (неделимых) исходов.
$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{im}\}$ составное событие, $\omega_{i_k} \in \Omega$.
Вероятность любого составного события A, состоящего из m элементарных исходов $\omega_{i_k} \in \Omega$, определяется как отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу исходов

$$P(A) = \frac{m}{n}\,. \tag{1}$$

Событие $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, образованное всей совокупностью элементарных событий, является достоверным. Согласно (1), вероятность достоверного события равна 1,

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1\,.$$

Теорема о сложении вероятностей

Теорема. Для любых несовместных составных событий $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{im}\}$ и $B = \{\omega_{j1}, \omega_{j2}, \dots, \omega_{jk}\}$ справедливо

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Для доказательства объединим события A и B в одно составное событие

$$C = A + B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{im}, \omega_{j1}, \omega_{j2}, \dots, \omega_{jk}\}.$$

По формуле (1) вычислим вероятность P(C),

$$P(A + B) = P(C) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B). \blacksquare$$

Следствия теоремы о сложении вероятностей

- Вероятность противоположного события вычисляется как $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$, так как $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$.
- Вероятность невозможного события равна нулю, так как невозможное событие противоположно полному событию Ω.

Задача 1

В аудитории 100 человек. 50 из них знают английский язык (E), 40 французский (F), 35 немецкий (D), 20 английский и французский (EF), 8 английский и немецкий (ED), 10 французский и немецкий (FD), 5 немецкий,английский и французский (EFD).

- Чему равна вероятность того, что случайно выбранный человек знает или английский, или французский язык $(E + F)$?
- Сколько человек не знает ни одного языка $(\overline{E}\ \overline{D}\ \overline{F})$?

Решение задачи 1

1) Согласно (3),
$P(E + F) = P(E) + P(F) - P(EF) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7.$
2) Событие $\overline{E}\ \overline{D}\ \overline{F}$ противоположно событию $E + F + D$, которое означает, что человек знает хотя бы один иностранный язык.

$$\begin{aligned} &P(E + F + D) = \\ &= P(E) + P(F) + P(D) - P(EF) - P(ED) - P(FD) + P(EFD) = \\ &= 0.5 + 0.4 + 0.35 - 0.2 - 0.08 - 0.1 + 0.05 = 0.92. \end{aligned}$$

Отсюда вероятность события "не знает ни английского, ни немецкого, ни французского", противоположного событию "знает хотя бы один из этих языков", имеет вид:

$$P(\overline{E}\ \overline{D}\ \overline{F}) = 1 - P(E + F + D) = 1 - 0.92 = 0.08.$$

Следовательно, 8 человек не знают ни одного иностранного языка.

Задача 2

Найти вероятности следующих событий при подбрасывании двух игральных кубиков одновременно:

- A число очков одинаково на обоих кубиках;
- B число очков на одном больше, чем на другом;
- C сумма очков четна;
- D сумма очков больше двух;
- E сумма очков не меньше пяти;
- F хотя бы на одном шесть очков;
- G произведение очков равно шести.

Решение задачи 2

$$P(A)=\frac{6}{36}, P(B)=\frac{5}{6}, P(C)=\frac{18}{36}, P(D)=\frac{35}{36},$$
$$P(E)=\frac{30}{36}, P(F)=\frac{11}{36}, P(G)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

A	1	2	3	4	5	6
1	*					
2		*				
3			*			
4				*		
5					*	
6						*

C	1	2	3	4	5	6
1	*		*		*	
2		*		*		*
3	*		*		*	
4		*		*		*
5	*		*		*	
6		*		*		*

D	1	2	3	4	5	6
1		*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*
4	*	*	*	*	*	*
5	*	*	*	*	*	*
6	*	*	*	*	*	*

E	1	2	3	4	5	6
1				*	*	*
2			*	*	*	*
3		*	*	*	*	*
4	*	*	*	*	*	*
5	*	*	*	*	*	*
6	*	*	*	*	*	*

F	1	2	3	4	5	6
1						*
2						*
3						*
4						*
5						*
6	*	*	*	*	*	*

G	1	2	3	4	5	6
1						*
2			*			
3		*				
4						
5						
6	*					

Формула сложения вероятностей для событий, которые не являются несовместными

Теорема.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{3}$$

Доказательство. Представим сумму $A + B$ в виде суммы двух несовместных событий A и $B \setminus A$ и используем формулу (2) вычисления вероятности суммы двух несовместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Разность $B \setminus A$ означает событие, при котором событие B происходит, когда не происходит A. С другой стороны, $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A)$, отсюда

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + (P(B) - P(AB)).\blacksquare$$

Обобщение формулы суммы вероятностей на число событий более двух

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A+B+C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \\
-\mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(AC) + \\
+\mathrm{P}(ABC)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A+B+C+D) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) - \\
-\mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(AC) - \mathrm{P}(AD) - \mathrm{P}(BD) - \mathrm{P}(CD) + \\
+\mathrm{P}(ABC) + \mathrm{P}(ABD) + \mathrm{P}(ACD) + \mathrm{P}(BDC) - \\
-\mathrm{P}(ABCD)
\end{aligned}$$

Условная вероятность и независимость событий

Условной вероятностью $P(A|B)$ называется вероятность события A при условии, что событие Bпроизошло.
n – количество элементарных исходов.
m – число исходов, удовлетворяющих событию B
r – число элементарных исходов, удовлетворяющих AB:

$$P(A|B) = \frac{r}{m} = \frac{r/n}{m/n} = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{4}$$

Вероятность произведения двух событий имеет вид

$$P(AB) = P(A|B)P(B). \tag{5}$$

Например, событие A означает четное число очков, B_1 число очков, большее 2, B_2 число очков, большее 3.

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5, \quad P(A|B_1) = \frac{2}{4} = 0.5, \quad P(A|B_2) = \frac{2}{3} = 0.667.$$

Независимость событий

Если условная вероятность совпадает с безусловной, т.е. $P(A|B) = P(A)$, то события A и B называются независимыми. Из (4) получаем, что для независимых событий вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \Rightarrow \quad P(AB) = P(A)P(B). \tag{6}$$

Знание английского языка не зависит от знания французского, так как $P(E) = 0.5$ $P(F) = 0.4$ $P(EF) = 0.2$
Знание английского языка зависит от знания немецкого, так как $P(E) = 0.5$, $P(D) = 0.35$, $P(ED) = 0.08$,
$P(E)P(D) = 0.5 \cdot 0.35 = 0.175 \neq 0.08 = P(ED)$

Анализ условных вероятностей

Условная вероятность меньше безусловной
$P(E|D) = \frac{P(ED)}{P(D)} = \frac{0.08}{0.35} = 0.23 < 0.5 = P(E)$.

$F \setminus E$	E	$\overline{E}$	сумма
F	20	20	40
$\overline{F}$	30	30	60
сумма	50	50	100

$D \setminus E$	E	$\overline{E}$	сумма
D	8	27	35
$\overline{D}$	42	23	65
сумма	50	50	100

С другой стороны, $P(D|E) = 8/50 = 0.16 < 0.35 = P(D)$ и $P(D|\overline{E}) = 27/50 = 0.54 > 0.35 = P(D)$, получаем более высокую вероятность знания немецкого языка среди студентов, которые не знают английский язык.

- Множество, состоящее из n элементов, будем называть n-множеством.
- Сочетанием будем называть m-подмножество из n-множества. Количество сочетаний будем обозначать через C_n^m.
- Размещение – это упорядоченное m-подмножество из n-множества. Количество размещений будем обозначать через A_n^m.
- Последовательное произведение натуральных чисел носит название факториал, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Если 5 спортсменов борются за первые три призовых места, то число вариантов тройки призеров равно C_5^3, а число вариантов занять первые три места равно A_5^3.

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}_{\text{m сомножителей}} = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{7}$$

Различные варианты упорядочивания n-множества называются перестановками

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Перестановки 3-множества имеют вид $(123), (132), (213), (231), (312), (321)$. Так как число размещений связано с числом сочетаний $A_n^m = C_n^m \cdot m!$, то

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{8}$$

Например, $C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$. $(123), (124), (134), (234)$.

Вероятность выигрыша в игре в кости

Figure: ИГральные кости astrogalos или "бабки".

Обозначим стороны астрагала A, B, C, D.
$P(A) = 0.39, P(B) = 0.37, P(C) = P(D) = 0.12$. В одной из игр в древней Греции бросали одновременно четыре астрагала. Выигрышным броском считался тот, при котором выпадали разные стороны; такой бросок назывался "‘Венерой"’.
При подбрасывании четырех костей одновременно общее число исходов равно $4^4 = 256$, но вероятности их появления разные.
$P(ABCD) = 0.39 \cdot 0.37 \cdot 0.12 \cdot 0.12 = 0.002$.
$24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ выигрышных варианта

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Суммируя соответствующие вероятности, получаем, что вероятность броска "‘Венера"’ равна $24 \cdot 0.002 \approx 0.05$.