0.1. Практическое занятие по теме моделирования

На этом занятии предполагается рассмотреть основные законы распределения (биномиальное, Пуассона, равномерное, нормальное), вычислить математические ожидания, дисперсии, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Промоделировать выборки, построить гистограммы и распределения модельных распределений. Сравнить характеристики теоретического и смоделированного распределения.

Биномиальное распределение

Случайная величина - это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно. В случае конечного или счетного количества исходов случайная величина ξ называется **дискретной**.

Если известны значения $x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots$, которые принимает случайная величина ξ, а также вероятности $p_i = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, \ldots, N,\ p_1 + \ldots + p_N + \ldots = 1$, то говорят, что задан ее **дискретный закон распределения**

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Например, при подбрасывании монеты возможны два исхода: успех или неудача, которые кодируются соответственно 1 и 0. Успех обычно ассоциируется с выпадением монеты строной "орел", которая выпадает с вероятностью $p = 0.5$. Неудача ассоциируется с выпадением стороны "решка", которая выпадает с вероятностью $q = 1 - p = 0.5$. Вероятность успеха p необязательно равна 0.5. Если при подбрасывании игрального кубика успехом считать выпадении шести очков, то $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. Случайная величина, принимающая два значения с вероятностями p и $q = 1 - p$, имеет **распределение Бернулли.** Для краткости можно использовать обозначение $\xi \sim \beta(p, 1)$.

Обозначим через ξ случайное число выпадения шести очков игрального кубика в $n = 4$ независимых испытаниях с вероятностью выпадения шести очков (успех) $p = \frac{1}{6}$. Построим закон распределения этой случайной величины. Вычисление вероятностей $P\{\xi = k\},\ k = 0, 1, \ldots, 4$, отображено в таблице 1, где через $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ обозначена вероятность невыпадения шести очков (неудача), через C_n^k число сочетаний по k из n элементов, которое вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Проверим, что вероятности p_k соответствуют закону распределения:

$$\sum_{k=1}^{4} p_k = \frac{5^4 + 4\cdot 5^3 + 6\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 1}{6^4} = \frac{(5+1)^4}{6^4} = 1.$$

число успехов k	варианты комбинаций	вероятность p_k
0	○○○○	$C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$
1	●○○○ ○●○○ ○○●○ ○○○●	$C_4^1 p^1 q^3 = 4\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3$
2	●●○○ ●○●○ ●○○● ○●●○ ○●○● ○○●●	$C_4^2 p^2 q^2 = 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$
3	●●●○ ●●○● ●○●● ○●●●	$C_4^3 p^3 q^1 = 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1$
4	●●●●	$C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

Таблица 1. Биномиальный закон распределения при $n = 4$ и $p = 0.5$.

Обозначим через $\varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, независимые случайные величины, имеющие распределение Бернулли с параметром p. Случайная величина $\xi = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, равная случайному числу успехов из n независимых испытаний, имеет **биномиальный закон распределения**:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Для краткости можно использовать обозначение $\xi \sim \beta(p,n)$.

Дисперсия суммы двух случайных величин ξ, η равна

$$D(\xi+\eta) = \mathbb{E}((\xi+\eta) - \mathbb{E}(\xi+\eta))^2 = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi) + (\eta - \mathbb{E}\eta))^2 =$$
$$= \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta)^2 + 2\underbrace{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)}_{cov(\xi,\eta)}$$

Если величины ξ, η независимы, то ковариация

$$cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)\mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta) = 0,$$

и дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий. Отсюда получаем, что дисперсия биномиально распределенной случайной величины равна npq. Производящая функция моментов, коэффициенты асимметрии и эксцесса представлены в таблице 3.

В R для моделирования n биномиальных случайных величин с вероятностью успеха $prob$ из $size$ независимых испытаний используется функция $rbinom(n, size, prob)$. Для СВ с распределением Бернулли $size = 1$.

Распределение Пуассона

Отдельно рассматривается случай, когда число испытаний велико при малой вероятности успеха p. Например, вероятность вызова скорой помощи в определенном временном интервале чрезвычайно мала в каждом отдельном случае. Но при наличии большого числа испытаний количество вызовов может оказаться счетным, то есть равным $0, 1, 2, \ldots$. Для того чтобы вычислить при $p \to 0$ и $n \to \infty$ предел вероятности

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

обозначим через $\lambda = np$ и умножим и разделим p_k на n^k.

$$p_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k}(np)^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \tag{3}$$

так как, по замечательному пределу, $e^{-1} = \lim\limits_{p\to 0}(1-p)^{\frac{1}{p}}$, при заданном k

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^{n-k} = \lim_{p\to 0}\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{pn}(1-p)^{-k} = e^{-\lambda},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1\,.$$

Случайная величина ξ, принимающая значения $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями (3), имеет **распределение Пуассона** $\mathcal{P}(\lambda)$. Так как $e^{\lambda} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1$. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны λ, так как

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\,.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} \overset{k=t+1}{=} \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(t+1)\lambda^{t+1}}{t!}e^{-\lambda} = \lambda^2+\lambda,$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = (\lambda^2+\lambda) - \lambda^2 = \lambda\,.$$

Производящая функция моментов, коэффициенты асимметрии и эксцесса представлены в таблице 3. В R для моделирования n случайных величин, распределенных по закону Пуассона с интенсивностью λ используется функция $rpois(n, \lambda)$.

Равномерное распределение.

Случайная величина $\xi \sim U(a, b)$ равномерно распределена на интервале $[a, b]$, если ее плотность распределения имеет вид $f(x) = \frac{1}{b-a}$ на интервале $[a, b]$ и равна нулю вне этого интервала. МО равно середине интервала, дисперсия пропорциональна длине интервала.

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Производящая функция моментов, коэффициенты асимметрии и эксцесса представлены в таблице 3. В R для моделирования n случайных величин, распределенных по равномерному закону на интервале $[a, b]$ используется функция $runif(n, min = a, max = b)$.

Нормальное распределение

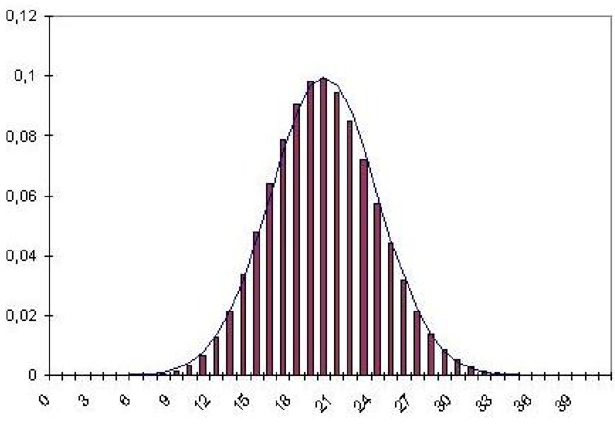

Рис. 1. Биномиальное распределение с параметрами $n = 100$ и $p = 0.2$ и нормальное распределение с параметрами $\mu = 20$, $\sigma^2 = 16$.

Нормальное или гауссовское распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ было получено как предельное биномиальное распределение при увеличиении числа испытаний. Плотность его распределения зависит от двух параметров μ, σ^2, смысл которых заключается в среднем и дисперсии.

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

При $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ распределение $f(x|0,1)$ называется стандартным нормальным. Для доказательства основного свойства плотности нужно вычислить двойной интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dxdy = 4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dxdy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right),$$

который может быть вычислен переходом к полярным координатам $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ с якобианом преобразования

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} drd\phi = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} drd\phi = rdrd\phi,$$

$$4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dxdy = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = 2\pi\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)|_0^\infty = 2\pi\,.$$

Отсюда $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$, и справедливо свойство плотности. Пусть $\xi_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$. МО $\mathbb{E}\xi_0 = 0$ из-за симметричности функции относительно нуля:

$$\mathbb{E}\xi_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0\,,$$

$$\mathbb{E}\xi_0^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

Воспользуемся интегрированием по частям $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$, где $u = x$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $v = -e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}|_0^\infty + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1\,.$$

Следовательно, $\mathbb{D}\xi_0 = 1$. Отсюда для $\xi = \sigma\xi_0 + \mu$ имеем МО $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sigma\xi_0 + \mu) = \mu$ и дисперсию $\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(\sigma\xi_0 + \mu) = \sigma^2\mathbb{D}\xi_0 = \sigma^2$.

Производящая функция моментов, коэффициенты асимметрии и эксцесса представлены в таблице 3. В R для моделирования n случайных величин, распределенных по нормальному закону с параметрами μ, σ, используется функция $rnorm(n, mean = \mu, sd = \sigma)$.

Распределение	Среднее	Дисперсия	γ_1	γ_2	ПФМ
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	μ	σ^2	0	0	$exp(\mu t + \frac{\sigma^2}{2})$
$\beta(p, n)$	np	npq	$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$	$\frac{1-6qp}{npq}$	$(q + pe^t)^n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$\lambda^{-\frac{1}{2}}$	λ^{-1}	$exp(\lambda(e^t - 1))$
$U(a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
$\gamma(\lambda, \alpha)$	$\frac{\lambda}{\alpha}$	$\frac{\lambda}{\alpha^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{6}{\lambda}$	$(1 - \frac{t}{\alpha})^{-\lambda}$

Таблица 2. Характеристики распределений

Покажем, что эксцесс равномерного распределения равен $-\frac{6}{5}$. Так как эксцесс не зависит от сдвига и масштаба, рассмотрим случай $\xi \sim U(0, 1)$.

$$\alpha_k = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}\,.$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\
\mu_3 = 0, \\
\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = \frac{1}{5} - \frac{4}{4\cdot 2} + \frac{6}{3\cdot 4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{80}, \\
\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{12^2}{80} - 3 = -\frac{96}{80} = -\frac{6}{5}\,.
\end{aligned}$$

Покажем, что коэффициент асимметрии и эксцесс распределения Пуассона $\mathcal{P}(\lambda)$ равны соответственно $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ и $\frac{1}{\lambda}$.

$$\alpha_k = \mathbb{E}\xi^k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{k-1}\lambda^j}{(j-1)!} e^{-\lambda} \quad {}^{j=t+1} = \lambda \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1)^{k-1}\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}.$$

$$\alpha_1 = \lambda, \quad \alpha_2 = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\alpha_3 = \lambda(\alpha_2 + 2\alpha_1 + 1) = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda,$$

$$\alpha_4 = \lambda(\alpha_3 + 3\alpha_2 + 3\alpha_1 + 1) =$$

$$= \lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda + 3\lambda + 1) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda,$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) - 3\lambda(\lambda^2 + \lambda) + 2\lambda^3 = \lambda\,,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 =$$

$$= (\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda) - 4\lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) + 6\lambda^2(\lambda^2 + \lambda) - 3\lambda^4 =$$

$$= 3\lambda^2 + \lambda\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\lambda}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2} - 3 = \lambda^{-1}\,.$$

- Промоделировать распределение (нумерация соответствует номерам вариантов)

  1. биномиальное $\beta(n = 5, p = 0.7)$, $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$
  2. Пуассона $P(\lambda = 0.01)$, $P\{\xi = j\} = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda},\ j = 0, 1, \ldots, \infty.$
  3. геометрическое $\beta_{-}(1, p = 0.1677)$, $P\{\xi = j\} = p(1-p)^j,\ j = 0, 1, \ldots, \infty.$
  4. отрицательно биномиальное $\beta_{-}(k = 3, p = 0.4)$, $P\{\xi = j\} = \frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k) j!} p^k (1-p)^j,\ j = 0, 1, \ldots, \infty.$
  5. гамма $\Gamma(\alpha = 1, \lambda = 4)$ с плотностью $\gamma(x|\alpha, \lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x},\ x \geq 0.$
  6. Вейбулла $W(k = 0.5, \lambda = 5)$ с плотностью $w(x|k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k},\ x$ 0.
  7. равномерное $U(a, b)$ с плотностью $u(x|a = 1, b = 3) = \frac{1}{b-a},\ a \leq x \leq b.$

8. биномиальное $\beta(n=3,p=0.75)$, $P\{\xi=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$.
9. Пуассона $P(\lambda=0.04)$, $P\{\xi=j\}=\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$, $j=0,1,\ldots,\infty$.
10. геометрическое $\beta_{-}(1,p=0.677)$, $P\{\xi=j\}=p(1-p)^j$, $j=0,1,\ldots,\infty$.
11. отрицательно биномиальное $\beta_{-}(k=0.5,p=0.45)$, $P\{\xi=j\}=\frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k)j!}p^k(1-p)^j$, $j=0,1,\ldots,\infty$.
12. гамма $\Gamma(\alpha=0.5,\lambda=8)$ с плотностью $\gamma(x|\alpha,\lambda)=\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}$, $x\geq 0$.
13. Вейбулла $W(k=0.5,\lambda=3)$ с плотностью $w(x|k,\lambda)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$, x 0.
14. равномерное $U(a,b)$ с плотностью $u(x|a=-1,b=3)=\frac{1}{b-a}$, $a\leq x\leq b$.

- На модельных данных построить гистограмму, найти математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение, ошибку среднего, медиану, минимум, максимум, квартили и интервартильный размах, асимметирю, эксцесс.

- Оценить параметры распределения по методу моментов и по методу максимального правдоподобия.

- Проверить согласие эмпирического и теоретического распределения по критерию хи-квадрат Пирсона.

- Промоделировать выборку с нормальным законом распределения и применить критерий согласия Шапиро-Уилка.

Для моделирования выборки объема N применяются следующие функции:

- $rbinom(N, size, prob)$ для биномиального $\beta(n,p)$, где $size$ означает число независимых испытаний n, $prob$ означает вероятность p успеха в одном испытании;

- $rpois(N, lambda)$ для распределения Пуассона, где $lambda$ соответствует параметру интенсивности λ;

- $rnbinom(N, size, prob)$ для отрицательно биномиального $\beta_-(k,p)$, где $size$ и $prob$ соответствуют параметрам k и p.

- $rgamma(N, shape, rate = 1, scale = 1/rate)$ для гамма распределения $\Gamma(\alpha,\lambda)$ с плотностью $\gamma(x|\alpha,\lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x},\ x \geq 0$, где $shape$ и $rate$ соответствуют параметрам λ и α.

- $rweibull(N, shape, scale)$ для распределения Вейбулла $W(k,\lambda)$, где $shape$ соответствует параметру k, а $scale$ параметру λ;

- $runif(N, min, max)$ для равномерного $U(a,b)$, где min, max соответствуют параметрам a, b.

- для нормального $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, где $mean$, sd соответствуют параметрами μ, σ.

Замечание. Для распределения Вейбулла асимметрия и эксцесс имеют соответственно вид:

$$\gamma_1 = \frac{\lambda^3\Gamma(1+3k^{-1}) - 3\mu\lambda^2\Gamma(1+2k^{-1}) + 2\mu^2}{\sigma^3},$$

$$\gamma_2 = \frac{\lambda^4\Gamma(1+4k^{-1}) - 4\lambda^3\mu\Gamma(1+3k^{-1}) + 6\mu^2\lambda^2\Gamma(1+2k^{-1}) - 3\mu^4}{\sigma^4}.$$

Распределение	Среднее	Дисперсия	γ_1	γ_2
$\beta(p,n)$	np	npq	$\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$	$\frac{1-6qp}{npq}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$\lambda^{-\frac{1}{2}}$	λ^{-1}
$\beta_{-}(k,p)$	$\frac{k(1-p)}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{k(1-p)}}$	$\frac{6}{k}+\frac{p^2}{k(1-p)}$
$\gamma(\lambda,\alpha)$	$\frac{\lambda}{\alpha}$	$\frac{\lambda}{\alpha^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{6}{\lambda}$
$W(k,\lambda)$	$\lambda\Gamma(1+k^{-1})$	$\lambda^2(\Gamma(1+2k^{-1})-\Gamma^2(1+k^{-1})$		
$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$-\frac{6}{5}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	μ	σ^2	0	0

Таблица 3. Характеристики распределений