Поправки Бонферони и множественные сравнения по Тьюки

Н.П. Алексеева

СПбГУ, математико-механический факультет

2020 г.

LSD (the least significant difference — наименее значимое различие) Пусть имеется r выборок $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma)$ x_{ij}, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$, $n = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i$, ранее было показано, что

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim T(n-r), \quad \text{где } s^2 = \frac{1}{n-r} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_{..})^2$$

Поправки Бонферрони применяются для того, чтобы частота ложноположительных результатов с поправкой на эффект множественных сравнений не превышала заданное значение.

Нулевые гипотезы $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_\mathrm{m}$, α — вероятность ошибки в каждом из выводов и $\tilde{\alpha}$ — вероятность совершить хотя бы одну ошибку из m выводов.

Например, $\mathrm{m} = \mathrm{C}_\mathrm{r}^2$, если проверяются гипотезы о равенстве всех попарных средних.

Если испытания независимы, то $\tilde{\alpha} = 1 - (1-\alpha)^\mathrm{m}$, а если зависимы, то $\tilde{\alpha} \leqslant 1 - (1-\alpha)^\mathrm{m}$. По неравенству Буля

$$\tilde{\alpha} = 1 - (1 - \mathrm{m}\alpha + \mathrm{C}_\mathrm{m}^2\alpha^2 - \ldots) \leqslant \mathrm{m} \cdot \alpha.$$

Таким образом, если мы хотим, чтобы вероятность наличия хотя бы одного неверного вывода из m была равна 0.05, то достаточно установить вероятность неверного отклонения нулевой гипотезы равной 0.05/m для каждого вывода. Такой метод называется поправкой Бонферрони. Если гипотезы имеют различные доверительные уровни вероятностей, то достаточно отвергнуть гипотезы, имеющие $\alpha < \tilde{\alpha}/\mathrm{m}$.

Метод множественных сравнений Шеффе

Определение

Сравнением параметров $\beta_1, \ldots, \beta_p$ называется линейная функция $\psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \beta_i$, где $\sum_{i=1}^{p} c_i = 0$. В матричном виде $\psi_{q,1} = C_{q,p}\beta_{p,1}, \quad \mathrm{rank}(C) = q$.

$$\hat{\psi} = C\hat{\beta} = C(X^T X)^{-} X^T Y = AY,$$

$$\Gamma_{\psi} = \sigma^2 A A^T, B = A A^T, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{R_0^2}{n - r}$$

Теорема

Если $Y \sim \mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 I)$, $\mathrm{rank}(X) = r$, то случайная величина $\hat{\psi} \sim \mathcal{N}(\psi, \Gamma_{\psi})$ и не зависит от $R_0^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-r)$. Поэтому

$$\frac{(\hat{\psi} - \psi)^T B^{-1} (\hat{\psi} - \psi)}{q s^2} \sim F(q, n - r).$$

Метод множественных сравнений Тьюки

Пусть элементы выборки $x_1, \ldots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ упорядочены в виде $x^{(1)} < \ldots < x^{(n)}$, разность $R = x^{(n)} - x^{(1)}$ называется размахом выборки, s^2 является несмещенной оценкой σ^2 и $\nu s^2/\sigma^2 = \chi^2_\nu$ не зависит от R. Случайную величину $R/s = q_{n,\nu}$ называют стьюдентизированным размахом.

Теорема

Пусть $\hat{\theta}_1, \ldots, \ \hat{\theta}_k \sim \mathcal{N}(\theta_i, a^2\sigma^2)$ независимы, $\frac{\nu s^2}{\sigma^2} = \chi^2_\nu$ не зависит от $\{\theta_i\}$, $\hat{\psi} = \sum_{i=1}^{k} c_i \hat{\theta}_i$, $T = a q_{\alpha,k,\nu}$, где $q_{\alpha,k,\nu}$ верхний α предел стьюдентизированного размаха. Тогда $1 - \alpha$ равна вероятности того, что все $\frac{k(k-1)}{2}$ разностей $\{\theta_i - \theta_j\}$ одновременно удовлетворяют неравенствам

$$\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j - Ts \leq \theta_i - \theta_j \leq \hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j + Ts$$

- Метод Тьюки можно применять для получения совместных доверительных утверждений о сравнениях множеста параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$ в терминах несмещенных оценок.
- Ограничением метода Тьюки является требование одинаковых дисперсий для оценок θ_i. Поэтому если нужна классификация по одному признаку, то объемы должны быть равными.
- Кроме того, существует обобщение для $\hat{\theta}_1, \ldots,\ \hat{\theta}_k$, необязательно независимых, но имеющих одинаковые ковариации и дисперсии.
- В критерии Пиллая используется верхний α предел стьюдентизированного максимума модулей $M = \max|x_i|/s$. Увеличенным размахом R' называется $\max(R, M)$.
- В тех случаях, когда главный интерес представляют все разности, причем никакой из них не отдается предпочтения, метод Тьюки дает более узкие интервалы, но применим только в случае одинаковых дисперсий.
- Преимущество метода Шеффе в том, что он нечувствителен к нарушению о предположении нормальности и равенства дисперсий.

Коды для множественных сравнений

```
library("multcomp"); library("agricolae")

df<-data.frame(group=as.factor(data.c$craving.to.alcohol.1),
X=as.numeric(data.m$HR.1))

ao<-aov(X~group,df)

# обычные LSD
LSD.test(ao,"group", p.adj="none",group=FALSE)

# LSD с поправками Бонферони
LSD.test(ao,"group", p.adj="bonferroni",group=FALSE)

# Тьюки
TukeyHSD(ao, "group", ordered = TRUE)
plot(TukeyHSD(ao, "group"))
```