Критерий отношения правдоподобия

Н.П. Алексеева,

СПбГУ, математико-механический факультет
для 422 группы

2020 г.

Проверка статистических гипотез (повторение)

Принцип маловероятных событий — события, вероятность которых мала, считаются невозможными.

- H_0 — гипотеза относительно параметров распределения или других свойств генеральной совокупности с функцией распределения $F(x|\theta)$ случайной величины ξ по выборочным наблюдениям $x_1, \ldots, x_n$.
- H_1 — конкурирующая или альтернативная гипотеза.
- Правило, согласно которому отвергается гипотеза, называется статистическим критерием.
- функция от выборочных наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, используемая для проверки гипотезы H_0, называется статистикой критерия.
- α уровень значимости, обычно $\alpha = 0.05$.
- V — критическая область $P(V|H_0) \leq \alpha$.

Гипотезу отвергают тогда, когда наблюдаемое значение статистики попадает в критическую область V.

ПРИМЕР

На $n = 25$ автомобилях с усовершенствованным двигателем средний расход бензина составил $\bar{x} = 9.3$ л на 100 км. Считая выборку нормальной $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ с дисперсией $\sigma^2 = 4$, выясним, нельзя ли наблюдаемое улучшение технической характеристики считать случайным.

Проверим гипотезу $H_0 : \mu = 10$ о том, что расход топлива не изменился, В качестве альтернативной рассмотрим гипотезу $H_1 : \mu < 10$.

Используя свойства выборочного среднего $\bar{x}$, рассмотрим статистику критерия $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ с критической областью $V = (-\infty; -1.645]$, о которой известно, что $P(V) = 0.05$. Подставляя значения параметров и $\bar{x} = 9.3$, получаем значение статистики $Z = -1.75 \in V$, следовательно, гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной H_1, уменьшение топлива значимо и не может быть объяснено случайностью.

Ошибки первого и второго рода, мощность

- Ошибка первого рода возникает в случае, когда отвергается верная гипотеза, $\alpha = \mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{H}_0)$.
- Ошибка второго рода возникает тогда, когда не отвергается альтернативная гипотеза $\beta = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{V}}|\mathrm{H}_1)$.
- Мощностью называется вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{H}_1) = 1 - \beta$.

Критерий, имеющий среди критериев, удовлетворяющих условию $\mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{H}_0) < \alpha$, наибольшую мощность $\mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{H}_1)$, называется наиболее мощным относительно H_1.
Критерий для проверки H_0 называется несмещенным, если $\forall \mathrm{H}_1\ \mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{H}_0) \leq \mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{H}_1)$.

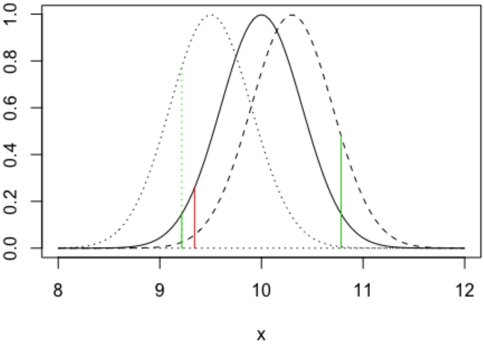
Пример смещенных и несмещенных критериев

$H_0 : \mu = 10$

$n = 25$, $\bar{x} = 9.3$, $\sigma^2 = 4$, $x_1, \ldots, x_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\alpha = 0.05$.

- Критерий $\bar{x} < \mu - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9.342$ является смещенным, так как при альтернативе $H_1 : \mu > 10$ имеем $P(V|H_0) > P(V|H_1)$.
- Несмещенным является критерий $|\bar{x} - \mu| > Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ с критической областью $V = (-\infty; 9.216] \cup [10.784; +\infty)$. Например, при $H_1 : \mu = 9$ и $H_1 : \mu = 11$ имеем $P(V) = 0.705$.

Смещенные и несмещенные критерии



Примеры вычисления ошибок первого и второго рода

Например, для проверки гипотезы $H_0 : \mu = 10$, при $\sigma = 2$, $n = 25$ с критической областью V, соотвествующей неравенству

$$\bar{x} < \mu - Z_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9.342,$$

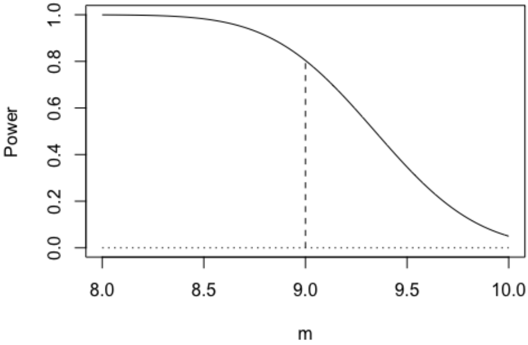
где $Z_{0.95}$ — квантиль $\mathcal{N}(0,1)$, ошибка первого рода равна

$$P\{\bar{x} < 9.342|\mu = 10\} =$$
$$= P\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{9.342-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\mu = 10\right\} = \Phi(-1.645) = 0.05\,.$$

График мощности

Сложная гипотеза $H_1 : \mu < 10$ рассматривается как множество простых.
Если $H_1 : \mu = 9$, тогда $1 - \beta = P\{\bar{x} < 9.342 | \mu = 9\} =$

$$= P\left\{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{9.342 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu = 9\right\} = \Phi(0.855) = 0.804\,.$$



Рассмотрим еще два критерия: $9.975 < \bar{x} < 10.025$ и $\bar{x} > 10.658$ с ошибками первого рода, также равными 0.05, и вычислим мощности при альтернативной гипотезе $H_1 : \mu = 9$.

$$\alpha_1 = \Phi\left(\frac{10.025 - 10}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{9.975 - 10}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.05,$$

$$1 - \beta_1 = \Phi\left(\frac{10.025 - 9}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{9.975 - 9}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.0022,$$

$$\alpha_2 = 1 - \Phi\left(\frac{10.658 - 10}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.05,$$

$$1 - \beta_2 = 1 - \Phi\left(\frac{10.658 - 9}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1.7 \cdot 10^{-5}.$$

Итак, критерий $\bar{x} < 9.342$ оказывается наиболее мощным, хотя и смещенным, так как $P(V|H_1) < 0.05$ при $H_1 : \mu > 10$.

Критерий отношения правдоподобия

Задача заключается в поиске наиболее мощного критерия, то есть в поиске V, для которой мощность $P(V|H_1)$ будет наибольшей при $P(V|H_0) < \alpha$.

Пусть E пространство непрерывных переменных $X = (x_1, \ldots, x_n)$, функции множеств $P(B) = P(B|H_0)$ и $P'(B) = P(B|H_1)$ определяются плотностями

$$f(X) = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ и } g(X) = f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Если $f(X) = 0$, где $X \in T \subset E$, то при присоединении T к V условие $P(V|H_0) < \alpha$ не изменится, а мощность $P'(V) = PV'$ может только увеличиться. Следовательно, на множестве $E \setminus T$ плотность f не равна нулю, и функция $U = U(X) = \frac{g}{f}$ является непрерывной функцией,

$$P\{U < v\} = P\left\{g < vf\right\}\,.$$

Пусть $\exists$ v > 0, такое что $\mathrm{P}\{\mathrm{g} < \mathrm{vf}\} = 1 - \alpha$ доверительная область. Тогда критическая область V определяется неравенством

$$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{f}} \geq \mathrm{v}\,.$$

Если для другой области W справедливо $\mathrm{P}(\mathrm{W}|\mathrm{H}_0) \leq \alpha$, тогда $\mathrm{P}'\mathrm{W} \leq \mathrm{P}'\mathrm{V}$.

Доказательство

Так как по условию $P(W|H_0) \leq \alpha$, то

$$P(V) = P(V \cap W) + P(V \setminus W) = \alpha,$$
$$P(W) = P(W \cap V) + P(W \setminus V) \leq \alpha,$$
$$\text{то } P(V \setminus W) \geq P(W \setminus V) \iff$$
$$\int\limits_{V \setminus W} f dX \geq \int\limits_{W \setminus V} f dX\,. \tag{1}$$

В критической области $g \geq vf$. Следовательно,

$$P'(V) = P'(V \cap W) + P'(V \setminus W) =$$
$$= P'(V \cap W) + \int\limits_{V \setminus W} g dX \geq P'(V \cap W) + \int\limits_{V \setminus W} vf dX \overset{(1)}{\geq}$$
$$\geq P'(V \cap W) + \int\limits_{W \setminus V} vf dX\,.$$

Итак, получено

$$P'(V) \geq P'(V \cap W) + \int\limits_{W \setminus V} vf dX\,.$$

На множестве $W \setminus V$ (вне критической области) для всех точек множества справедливо $g < vf$, поэтому

$$P'(V) \geq P'(V \cap W) + \int\limits_{W \setminus V} g dX =$$

$$= P'(V \cap W) + P'(W \setminus V) = P'(W)\,.$$

Что и требовалось доказать.

Так как плотности f(X) и g(X) являются функциями правдоподобия гипотез H_0 и H_1, их отношение называется отношением правдоподобия. Только что полученный критерий отношения правдоподобия можно сформулировать так:

Гипотезу H_0 о том, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ определяются плотностью f(X), следует отвергнуть, если отношение правдоподобия

$$U = \frac{g(x)}{f(x)} \geq v.$$

Критическое значение v_0 выбирается таким образом, чтобы вероятность ошибки первого рода равнялась $\alpha = P\{U \geq v_0\}$.

Этот критерий целесообразен в случае, когда имеется большая уверенность в том, что может быть верна H_1.

Пример критерия отношения правдоподобия

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ выборка над $\mathcal{N}(0,1)$, тогда

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_n^2)}.$$

Согласно H_1, $x_1, \ldots, x_n \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, где $\mu > 0$,

$$g(X) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}((x_1-\mu)^2+\ldots+(x_n-\mu)^2}.$$

Отношение правдоподобия

$$U = \frac{g}{f} = e^{\mu \sum_i x_i - \frac{n\mu^2}{2}}$$

является монотонно возрастающей функцией от $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Гипотезу H_0 следует отвергнуть, когда $\bar{x} > c$. Критическое значение c выбирается таким образом, чтобы $P\{\bar{x} > c\} = \alpha$ при справедливости H_0. Следовательно, $c = Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. В случае $\mu > 0$ этот критерий не зависит от μ и является равномерно наиболее мощным.

Если в качестве конкурирующей гипотезы H_1 взять нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu < 0$, тогда H_0 отвергается при $\bar{x} < -c$.